

## THESIS / THÈSE

### DOCTEUR EN SCIENCES

#### Théorie analytique fermée d'un satellite artificiel lunaire pour l'analyse de mission

De Saedeleer, Bernard

*Award date:*  
2006

*Awarding institution:*  
Université de Namur

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



FACULTÉS UNIVERSITAIRES  
NOTRE-DAME DE LA PAIX  
NAMUR

---

FACULTE DES SCIENCES  
Département de Mathématique

# **Théorie analytique fermée d'un satellite artificiel lunaire pour l'analyse de mission**

Dissertation présentée par  
**Bernard De Saedeleer**  
en vue de l'obtention du grade  
de Docteur en Sciences

Composition du Jury :

Timoteo CARLETTI  
Florent DELEFLIE  
Jacques HENRARD (Promoteur)  
Anne LEMAITRE  
Alain VIENNE

2006

© Presses universitaires de Namur & Bernard De Saedeleer

Rempart de la Vierge, 13  
B - 5000 Namur (Belgique)

Toute reproduction d'un extrait quelconque de ce livre,  
hors des limites restrictives prévues par la loi,  
par quelque procédé que ce soit, et notamment par photocopie ou scanner,  
est strictement interdite pour tous pays.

Imprimé en Belgique

ISBN-10 : 2-87037-526-3  
ISBN-13 : 978-2-87037-526-6  
Dépôt légal : D / 2006 / 1881 / 20

## **Théorie analytique fermée d'un satellite artificiel lunaire pour l'analyse de mission**

par Bernard De Saedeleer

**Résumé :** Le but de ce travail est de développer un outil d'aide à l'analyse de mission pour un satellite artificiel autour de la Lune. Nous développons tout d'abord une théorie analytique qui décrit suffisamment bien la dynamique du satellite lunaire : nous considérons les quatre perturbations majeures de natures différentes qui l'influencent, ainsi que leurs différents couplages. Les résultats sont obtenus sous forme fermée, sans aucun développement en série de l'excentricité ni de l'inclinaison de l'orbite du satellite : la solution s'applique donc à une large gamme de valeurs. Nous utilisons la méthode des Transformées de Lie pour moyenniser deux fois l'Hamiltonien du problème, dans des variables canoniques, ce qui permet d'intégrer des orbites avec un temps de calcul réduit d'un facteur environ 200 000. Grâce à cela, nous produisons des cartes inédites d'espaces de phase  $(a,i)$  qui permettent de sélectionner les paramètres orbitaux selon les besoins de la mission lunaire. De nombreuses vérifications analytiques par rapport à la littérature ont été réalisées, et se sont avérées concluantes; la qualité des deux moyennisations a également été vérifiée. Le logiciel développé est souple et permet un traitement automatisé; les intégrations sont automatiquement vérifiées. Nous avons aussi apporté quelques améliorations significatives au manipulateur algébrique des FUNDP, comme l'ajout de fractions symboliques. Par ailleurs, nous résolvons le problème zonal complet du satellite artificiel, étudions l'effet de  $C_{22}$  sur l'inclinaison critique ainsi que l'effet de la Terre sur les durées de vie orbitales limitées de certains satellites lunaires.

## **Closed form analytical theory of a lunar artificial satellite for mission analysis**

by Bernard De Saedeleer

**Abstract :** The aim of this work is to develop a tool helpful to mission analysis of a lunar artificial satellite. We first develop an analytical theory which sufficiently well describes the dynamics of the lunar satellite : we consider the four main perturbations of various kind which influence it, together with their several coupling. The results are obtained in closed form, without any series expansion in eccentricity nor inclination of the orbit of the satellite : so the solution applies for a wide range of values. We use the Lie Transform method for averaging twice the Hamiltonian of the problem, in canonical variables, which allows to integrate orbits with a CPU time reduced by a factor of about 200 000. Thanks to that, we produce unpublished  $(a,i)$  phase space maps from which the orbital parameters can be selected on the basis of the needs of the lunar mission. Many conclusive analytical checks with the literature have been performed, and both averaging processes have been checked. The software developed is flexible and allows an automated treatment; the integrations are automatically checked. We also improved significantly the algebraic manipulator of the FUNDP, like the inclusion of symbolic fractions. Moreover, we solve the complete zonal problem of the artificial satellite, we study the effect of  $C_{22}$  on the critical inclination, and also the effect of the Earth on the limited orbital lifetimes of some lunar satellites.

Dissertation doctorale en Sciences mathématiques (Ph.D. thesis in Mathematics)

Date : 28-06-2006

Département de Mathématique

Unité de Systèmes Dynamiques

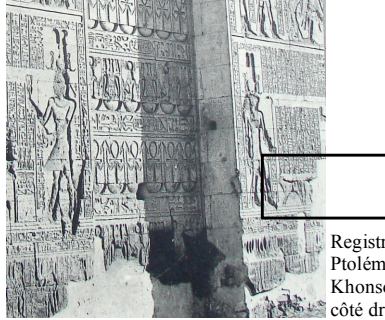
Promoteur (Advisor) : Prof. J. HENRARD



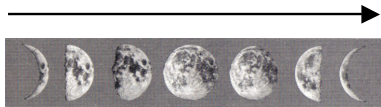


« Ô personnification de la Lune, tu es comme un taureau brûlant mais, lorsque tu décroîs, ô Lune, tu es telle un taureau châtré destinée à l'obscurité ! »

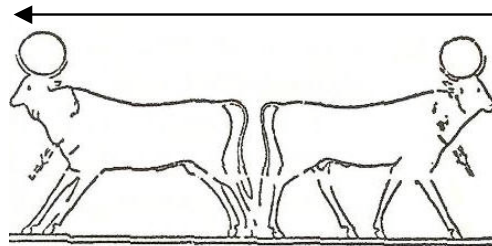
Texte extrait des registres ci-dessous  
(époque ptolémaïque, 3<sup>e</sup> s. av. J.-C.)



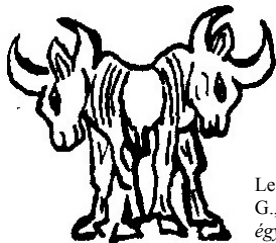
Registres inférieurs de la porte intérieure de Ptolémée III Evergète I<sup>er</sup> face au temple de Khonsou (sanctuaire d'Amon à Karnak) – côté droit entrant dans le temple.



Les égyptiens lisent de droite à gauche et aiment la symétrie : le taureau regardant vers la droite représente la lune croissante (fertile); la pleine lune est située au centre, et le boeuf regardant vers la gauche représente la lune décroissante.



Représentation illustrant les phases de la Lune (Jéquier, G., 1924, *L'architecture et la décoration dans l'ancienne Égyptienne*, 3 : *Les temples ptolémaïques et romains*, Paris, pl. I 4).



Dessin de la plus ancienne représentation des phases de la Lune (époque proto-dynastique, ca. -3500 av. J.-C.).

Le double taureau sur la *Palette de la Chasse* (Jéquier, G., 1946, *Considérations sur les religions égyptiennes*, Boudry-Neuchâtel, La Baconnière, 172).



*« Le talent ça n'existe pas. Le talent, c'est avoir l'envie de faire quelque chose. (...) »*

*Et je crois qu'avoir envie de réaliser un rêve, c'est le talent.*

*Et tout le restant c'est de la sueur, c'est de la transpiration, c'est de la discipline. (...) »*

*Je crois qu'il y a des gens qui travaillent à quelque chose et qui travaillent avec une grande énergie finalement.*

*Et l'accident de la nature, je n'y crois pas, pratiquement pas. »*

*Jacques Brel*



## *Remerciements*

Mes premiers mots seront immanquablement pour Jacques Henrard, mon promoteur, envers qui je suis redevable à plusieurs titres. Tout d'abord son soutien et la confiance qu'il m'a accordée durant toutes ces années, et la place qu'il a bien voulu me faire au sein de son équipe de Mécanique Céleste. Mais nos échanges datent d'avant même mon arrivée aux FUNDP : je me souviens que nous dialoguions déjà agréablement par email en 1996 sur des sujets astronomiques et aussi des séminaires Math-Physique. Nous avons tissé au fil du temps une relation à la fois scientifique et d'amitié, dont je garderai un souvenir immatériel appréciable. Je dois bien avouer que je me sens quelquefois bambin face à ce père spirituel qui a guidé mes premiers pas en Mécanique Céleste. Nous avons eu de nombreuses discussions fort intéressantes, et il s'est toujours montré très disponible et prêt à répondre à mes nombreuses questions. Il a notablement amélioré le manipulateur algébrique afin d'assouvir mes besoins grandissants en calcul symbolique. Il est clair que cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans lui : un grand merci !

Je lui associe directement toute l'équipe de Systèmes Dynamiques, en particulier Anne Lemaître, que je remercie pour ses encouragements inlassables, son dynamisme inégalable et ses casse-tête amusants. Merci à Nicolas Rambaux pour son aide lors des intégrations numériques. J'aurai toutefois toujours un regret enfoui de n'avoir pas pu connaître davantage Michèle Moons<sup>†</sup>, dont les conseils lunaires auraient très certainement été précieux.

Merci aux membres du Jury pour le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer, et pour leurs remarques pertinentes ; et en particulier à Florent Deleflie, pour nos nombreuses discussions animées lors de son séjour ici.

Merci au département de Math pour son accueil chaleureux, son environnement dynamique et serein propice à la réflexion d'un chercheur ; ainsi que pour la possibilité offerte d'assister à de nombreux congrès et écoles, et d'y rencontrer des experts. Merci au FNRS et à la Communauté Française pour les financements.

Merci aux assistants et chercheurs que j'ai croisés : je pense entre autres à Stéphane Valk pour nos prises de tête célestes et pour nos épopées sympas lors des congrès, à André Füzfa pour nos discussions cosmologiques, à Fabian Bastin pour avoir été quelquefois le seul mais fidèle à comprendre mes blagues du 3<sup>e</sup> degré, à Jean-Paul Hubert pour nos nombreuses discussions sur les théories de la dérive des continents, à Julien pour son aide. Merci aux secrétaires, Martine et Pascale, pour leur assistance constante et leur bonne humeur.

J'ai également reçu des aides techniques appréciables durant mon parcours : je pense ici plus spécialement à Sébastien Le Maistre (ORB) pour m'avoir mis le pied à l'étrier pour l'utilisation de SPICE, et à Joe Zender (ESA) de m'avoir communiqué les SPICE kernels de SMART-1. Merci aussi à Greg Neumann, Frank Lemoine (GSFC) et Alex Konopliv (JPL) pour les discussions concernant les modèles de gravité lunaire.

La partie rédactionnelle est toujours un exercice périlleux, lors duquel les aides fleurissent ça et là : merci à mes relecteurs, au premier chef ma femme, Sandrine, la première et dernière (lectrice), et la plus exigeante. Merci également à mon ami fidèle Rabah Hadjit, qui a relu ma thèse depuis les Etats-Unis. Merci à Rémi Lambert, pour son livre et son soutien logistique sur des questions de  $\text{\LaTeX}$  plus pointues.

Merci à Julien De Vos, mon professeur de hiéroglyphes, pour ses fouilles sinueuses qui ont abouti aux illustrations égyptiennes figurant en début d'ouvrage ; merci à Guy Biart de m'avoir autorisé, au pied levé, l'accès à la réserve précieuse des BUMP.

Merci à tous ceux qui ont été là dans les moments difficiles, tant humains que professionnels, et qui m'ont permis de reprendre une route plus sereine, celle nécessaire à un scientifique pensif. Je pense ici, outre Sandrine, Jacques et Anne, plus particulièrement à Annick Sartenaer et à Marcel Rémon.

J'ai en tête également de nombreux visages croisés ça et là, au gré de cette grande aventure de thésard et de passion astronomique. Je pense entre autres au congrès de Washington (merci à David Folta pour la visite du GSFC de la NASA), à celui du Chili (TNO, visite du VLT, du cratère Monturaqui), et à la grande aventure du Transit de Vénus 2004, aux conférences sympathiques dans les groupes d'astro amateurs, au centre de Redu (ESA), à Jean Meeus et à André Koeckelenbergh.

Merci au Ciel & au Grand Mécanicien Céleste de nous donner tant de choses merveilleuses à découvrir !

Merci à mes amis de tout bord, les Carolos, les Montois, et les autres, qui ont toujours été à mes côtés, avec la mauvaise foi — il est vrai — réconfortante de l'amitié.

Merci aux membres de ma famille, présente ou disparue, pour tout ce qu'elle m'a apporté.

Merci à ma femme et néanmoins collègue, pour son sourire, sa fantaisie, sa patience, sa présence, son aide, merci pour tout, merci pour elle.

Merci à tous ceux et à toutes celles à qui je devrais dire merci.

Je terminerai par quelques mots d'excuses : à Anne Lemaître pour avoir un peu trop monopolisé les ouvrages de Mécanique Céleste, aux informaticiens pour les désagréments éventuels lors de la factorisation des nombres de Fermat gourmande en CPU.

A tous, encore merci !

Bernard

*à Sam,*

*à ma femme, dont le  $J_2$  est visiblement  
de plus en plus prononcé, et*

*à mon fils à venir, qui naîtra au beau  
milieu des Orionides.*

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>PRÉLIMINAIRES</b>	<b>5</b>
<b>1</b>	<b>La Lune</b>	<b>7</b>
1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Le problème des 2 corps . . . . .	9
1.3	Champ de gravité et harmoniques sphériques . . . . .	15
1.4	Harmoniques sphériques lunaires . . . . .	21
1.5	Conclusion . . . . .	33
<b>2</b>	<b>Le satellite artificiel lunaire : perturbations principales</b>	<b>35</b>
2.1	Classement par ordre de grandeur des perturbations . . . . .	35
2.2	Sphère d'influence . . . . .	37
2.2.1	Taille de la sphère d'influence . . . . .	37
2.2.2	Forme exacte de la sphère d'influence . . . . .	41
2.2.3	Conclusion . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Théorie des Perturbations &amp; Transformées de Lie symplectiques</b>	<b>43</b>
3.1	Transformées de Lie symplectiques . . . . .	44
3.2	Algorithme de calcul . . . . .	44
3.3	Equation homologique et convergence . . . . .	46
3.4	Triangles de Lie considérés pour le satellite lunaire . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Outil de calcul symbolique : le MM</b>	<b>51</b>
<b>II</b>	<b>MOYENNISATION DES COURTES PÉRIODES</b>	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>Le problème principal du Satellite Artificiel : <math>J_2</math></b>	<b>57</b>
5.1	Le problème principal du satellite artificiel via les Transformées de Lie . . . . .	58
5.2	Résultats . . . . .	62
5.3	Astuces pour l'intégration . . . . .	63
5.4	Quelques problèmes de simplifications . . . . .	66
5.5	Equivalence entre Théories de Perturbation . . . . .	68
5.6	Validation des résultats en $J_2 : \tilde{\mathcal{H}}_0^{(1)}$ et $\mathcal{W}_1$ . . . . .	70
5.7	Validation des résultats en $J_2^2 : \tilde{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ et $\mathcal{W}_2$ . . . . .	71
5.8	Conclusions . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Le problème zonal complet du Satellite Artificiel : <math>J_n</math></b>	<b>75</b>



6.1	Transformée de Lie et Hamiltonien moyennisé $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ . . . . .	76
6.2	Expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour le cas $n$ pair . . . . .	78
6.3	Expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour le cas $n$ impair . . . . .	81
6.4	Résumé de l'expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour tout $n$ . . . . .	83
6.5	Vérifications de l'expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour $J_{2-7}$ . . . . .	84
6.6	Efficacité de l'expression analytique qui donne $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ . . . . .	87
6.7	Expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour le cas $n$ pair . . . . .	89
6.8	Expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour le cas $n$ impair . . . . .	90
6.9	Résumé de l'expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour tout $n$ . . . . .	91
6.10	Vérifications de l'expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour $J_{2-8}$ . . . . .	92
6.11	Conclusions . . . . .	92
<b>7</b>	<b>Le problème principal du Satellite Artificiel synchrone : <math>J_2 + C_{22}</math></b>	<b>93</b>
7.1	Développement de la perturbation due à $C_{22}$ . . . . .	93
7.2	Résultats . . . . .	95
7.3	Taille des calculs et détails techniques . . . . .	98
7.4	Conclusions . . . . .	99
<b>8</b>	<b>Le problème complet du Satellite Artificiel lunaire</b>	<b>101</b>
8.1	Expression de la perturbation due à un troisième corps . . . . .	101
8.2	Développement de la perturbation due à la Terre . . . . .	102
8.3	Moyennisation de la perturbation du 3 <sup>e</sup> corps . . . . .	106
<b>9</b>	<b>Exploitations intermédiaires de la théorie analytique</b>	<b>109</b>
9.1	Effet combiné de $J_2$ et de $C_{22}$ sur l'inclinaison critique . . . . .	109
9.2	Effet incrémental de chaque perturbation $\epsilon, \delta, n_{\mathbb{C}}, \gamma$ . . . . .	111
9.2.1	Intégrations numériques . . . . .	113
9.2.2	Effet de $J_2$ seul . . . . .	113
9.2.3	Effet conjugué de $J_2$ et de $C_{22}$ . . . . .	114
9.2.4	Effet supplémentaire de $n_{\mathbb{C}}$ et de la Terre . . . . .	115
9.2.5	Conditions initiales osculatrices versus moyennes . . . . .	119
9.2.6	Conclusion . . . . .	119
9.3	Compétition Terre-Lune : durée de vie d'un satellite lunaire . . . . .	121
<b>10</b>	<b>Triangle de Lie numérique d'ordre 4</b>	<b>125</b>
10.1	Paramètres de perturbation adimensionnels . . . . .	125
10.2	Triangle de Lie numérique et Hamiltonien moyennisé . . . . .	127
10.3	Conclusion . . . . .	128
<b>11</b>	<b>Conclusions de la partie II</b>	<b>131</b>
<b>III</b>	<b>MOYENNISATION DES MOYENNES PÉRIODES</b>	<b>135</b>
<b>12</b>	<b>Seconde moyennisation</b>	<b>137</b>
<b>13</b>	<b>Exploitation finale de la théorie : analyse paramétrique</b>	<b>143</b>

<b>IV CONCLUSIONS &amp; PERSPECTIVES</b>	<b>159</b>
<b>ANNEXES</b>	<b>163</b>
<b>A Quelques coefficients de modèles d'Harmoniques Sphériques</b>	<b>165</b>
A.1 Modèle en harmoniques sphériques de degré $N = 16$ .	165
A.2 Modèle en harmoniques sphériques de degré $N = 165$ .	167
<b>B Calcul des dérivées <math>\partial\Xi/\partial\Lambda</math></b>	<b>169</b>
B.1 Dérivées partielles de $a, n, s, c, e, \eta$ .	169
B.2 Dérivées partielles de $\xi, f, u$ .	170
B.2.1 Dérivées partielles de l'anomalie excentrique $u$ .	171
B.2.2 Dérivées partielles de $\xi = \frac{a}{r}$ .	171
B.2.3 Dérivées partielles de $f$ .	172
B.3 Tableau résumé des dérivées partielles $\partial\Xi/\partial\Lambda$ .	173
B.4 Dérivées partielles annexes : $\ln(r)$ .	174
<b>C Générateurs en <math>J_2^2</math></b>	<b>175</b>
C.1 Série du générateur du second ordre $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{F}_W$ .	175
C.2 Générateur du second ordre $S_2$ de Kozai.	178
<b>D Quelques propositions concernant les intégrales</b>	<b>179</b>
D.1 Calcul de $\int \cos^i(x) dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos^i(x) dx$	179
D.2 Calcul de $\int_{pp} \cos^i(f) \cos(af) df$ et $\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df$	181
D.3 Calcul de $\int_{pp} \cos^i(f) \sin(af) df$ et $\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \sin(af) df$	184
<b>E Séries caractéristiques</b>	<b>185</b>
E.1 Série $\gamma\mathcal{H}_{(2)}'$ de la perturbation terrestre (200 termes).	185
E.2 Série $a = \bar{a} + \dots$ (96 termes).	188
E.3 Série $\bar{\mathcal{H}}$ (164 termes).	189
E.4 Série $\mathcal{H}$ (30 termes).	191
<b>F Calcul de <math>\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle</math> et <math>\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle</math></b>	<b>193</b>
F.1 Calcul de $C = \langle \xi^{-n} \cos kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$	193
F.2 Calcul de $S = \langle \xi^{-n} \sin kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$	195
F.3 Calcul de $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$ pour le cas $k = 0$	196
F.4 Quelques expressions explicites de $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$ et validations	196
F.5 Calcul de $SS = \langle \xi^{-n} \psi \sin kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$	197
F.6 Calcul de $CC = \langle \xi^{-n} \psi \cos kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$	198
F.7 Calcul de $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$ pour le cas $k = 0$	199
F.8 Quelques expressions explicites de $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$ et validations	199
<b>G Tableau résumé de quelques valeurs moyennes et générateurs</b>	<b>201</b>
<b>H Description sommaire du programme de moyennisation</b>	<b>205</b>
<b>I Extension du manipulateur symbolique MM : gestion de fractions</b>	<b>209</b>
I.1 Description sommaire	209
I.2 Validation extensive	210
I.3 Un exemple de calcul	211
<b>J Orbites de satellites lunaires réels</b>	<b>215</b>



# Notations principales

TAB. 1: Liste des symboles utilisés et valeurs typiques.

	Définition	Ref.	Note ou source	Valeur	Unités
<b>symboliques</b>					
$\zeta$	Lune	TAB. 1.6			
$\oplus$	Terre	TAB. 1.6			
$\odot$	Soleil	TAB. 2.1			
$(\bullet; \bullet)$	Parenthèse de Poisson	(3.11)			
$\bullet$	Moyennisé, normalisé ou conjugué	TAB. 3.1			
$[\bullet]$	Unités	FIG. 1.10			
$[\bullet]_-$	Partie entière inférieure	(1.42)			
$[\bullet]_+$	Partie entière supérieure	(6.72)			
$\vec{\nabla}$	Opérateur gradient ("nabla")	(1.23)			
$\Delta$	Opérateur laplacien	(1.23)	$\Delta = \nabla^2$		
$(\bullet)$	Combinaison	(3.16)	$\binom{i}{k} = C_i^k = i!/(k!(i-k)!)$		
$D$	Opérateur de dérivée de Lie	(3.10)			
$ \bullet $	Norme	(8.1)			
$\bullet \bullet$	Produit scalaire	(8.1)			
$\langle \bullet \rangle$	Moyenne par rapport l'anomalie $l$	(8.7)	$\langle \bullet \rangle = (\int_0^{2\pi} \bullet dl)/(2\pi)$		
$\langle \bullet \rangle_x$	Moyenne par rapport l'anomalie $x$	(8.8)	$\langle \bullet \rangle_x = (\int_0^{2\pi} \bullet dx)/(2\pi)$		
<b>latines</b>					
$A$	Moment d'inertie principal	(1.60)			
$\vec{A}_\oplus$	Direction de la Terre par rapport à la Lune	(8.10)	$\vec{A}_\oplus = (A_\oplus, B_\oplus, C_\oplus)$		
$a$	Demi-grand axe de l'orbite du satellite	(1.1)			$[R]$
$a_\zeta$	Demi-grand axe de l'orbite de la Lune autour de la Terre	(8.6)	[Seidelmann, 1992]	384 400	km
$B$	Moment d'inertie principal	(1.60)			
$b$	Demi-petit axe de l'orbite du satellite	(1.6)	$b = a\sqrt{1-e^2}$		
$C$	Moment d'inertie principal	(1.60)			
$C^*$	Moment d'inertie polaire normalisé	(1.66)		$0.3932 \pm 0.0002$	
$C_{nm}$	Coefficients (non normalisés) du développement en harmoniques sphériques	(1.45)			
$C_{20}$	Coefficient zonal de degré 2	(1.60)	$C_{20} = -J_2$		
$C_{22}$	Coefficient tesseral de degré 2	(1.60)			
$C_{22N}$	Valeur nominale de $C_{22}$	(10.8)	cas lunaire [LP]	$22.36 \times 10^{-6}$	
$c$	Variable auxiliaire (satellite) liée à $i$	(5.9)	$c = \cos i$		
$c_+$	Notation courte	(4.3)	$c_+ = 1 + c$		
$c_-$	Notation courte	(4.3)	$c_- = 1 - c$		
$D$	Différence Lune-Soleil	TAB. 8.1	$D = \lambda_\zeta - \lambda_\odot$		
$d_{\oplus\zeta}$	Distance Terre-Lune moyenne [Chapront-Touzé and Chapront, 1991]	(8.3)	$d_{\oplus\zeta} = a_\zeta(1 + e_\zeta^2/2)$	385 000.57	km
$e$	Excentricité de l'orbite du satellite	(1.1)			
$e_\zeta$	Excentricité de l'orbite de la Lune autour de la Terre	(8.6)	[Seidelmann, 1992]	0.05490	
$F$	Différence Lune-Lune	TAB. 8.1	$F = \lambda_\zeta - \Omega_\zeta$		
$\mathcal{F}_\mathcal{H}$	Facteur multiplicatif pour $\mathcal{H}$	(5.23)	$\mathcal{F}_\mathcal{H} = 64a^2\eta^7/(3n^2)$		
$\mathcal{F}_\mathcal{W}$	Facteur multiplicatif pour $\mathcal{W}$	(5.24)	$\mathcal{F}_\mathcal{W} = 4096a^2\eta^9/n$		
$f$	Aplatissement lunaire	FIG. 1.13		$1/3234.93$	
$f$	Anomalie vraie du satellite	(1.6)			
$\mathcal{G}$	Constante universelle de la gravitation	TAB. 1.2	[Seidelmann, 1992]	$6.67259 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3/\text{kg.s}^2$
suite à la page suivante					

<i>suite de la page précédente</i>					
	Définition	Ref.	Note ou source	Valeur	Unités
$G$	Variable de Delaunay (satellite)	(1.19)	$G = \sqrt{\mu a(1 - e^2)}$		$[n_N R^2]$
$g$	Variable de Delaunay (satellite)	(1.19)	$g = \omega$		
$H$	Variable de Delaunay (satellite)	(1.19)	$H = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i$		$[n_N R^2]$
$\mathcal{H}$	Hamiltonien (première moyennisation)	(3.18)			$[n_N^2 R^2]$
$\mathcal{H}_{2B}$	Hamiltonien du problème des 2 corps	(1.20)	$\mathcal{H}_{2B} = -\mu^2/(2L^2)$		
$h$	Altitude du satellite lunaire	TAB. 10.1	$h = r - R$		
$h_N$	Valeur nominale de l'altitude $h$	(10.1)		500	km
$h$	Variable de Delaunay (satellite)	(1.19)	$h = \Omega - \lambda_{\oplus}$		
$h_a$	Altitude maximale (à l'apocentre)	TAB. 1.3	$h_a = r_a - R$		$[R]$
$h_p$	Altitude minimale (au péricentre)	TAB. 1.3	$h_p = r_p - R$		$[R]$
$I_{xy}$	Moment d'inertie	(1.59)			
$i$	Inclinaison de l'orbite du satellite	(1.10)			
$\mathcal{I}$	Matrice symplectique	(3.5)			
$J$	Jacobienne	(1.29)			
$J_n$	Coefficient zonal de degré $n$	(1.58)	$J_n = -C_{n0}$		
$J_2$	Coefficient zonal de degré 2	TAB. 1.6	$J_2 = -C_{20}$		
$J_{2N}$	Valeur nominale de $J_2$	(10.8)	cas lunaire [LP]	$2.032 \times 10^{-4}$	
$\mathcal{K}$	Hamiltonien (seconde moyennisation)	(12.2)			$[n_N R^2]$
$k_2$	Nombre de Love	p. 29	[Konopliv et al., 2001]	$0.026 \pm 0.003$	
$L$	Variable de Delaunay (satellite)	(1.19)	$L = \sqrt{\mu a}$		$[n_N R^2]$
$l$	Variable de Delaunay (satellite)	(1.19)	$l = M$		
$l_{\odot}$	Anomalie moyenne du Soleil	TAB. 8.1			
$l_{\mathcal{L}}$	Anomalie moyenne de la Lune	TAB. 8.1			
$M, M_{\mathcal{L}}$	Masse de la Lune	(1.21)	[Seidelmann, 1992]	$7.348 \times 10^{22}$	kg
$M_{\oplus}$	Masse de la Terre	(8.1)	$M_{\oplus}/M_{\mathcal{L}} \approx 81.3008$	$5.9742 \times 10^{24}$	kg
$M$	Anomalie moyenne	(1.9)	$M = u - e \sin u$		
$m$	Ordre de l'harmonique sphérique	(1.37)			
$N$	Degré maximum du développement (en Harmoniques sphériques ou de Lie)	(1.46)			
$n$	Moyen mouvement angulaire du satellite	(1.9)	$n^2 a^3 = \mu$		rad/j
$n$	Degré de l'harmonique sphérique	(1.34)			
$n_N$	Valeur nominale de $n$ satellite	(10.2)		57.16	rad/j
$n_{\mathcal{L}}$	Moyen mouvement de la Lune	(1.67)	$n_{\mathcal{L}} = 2\pi/T_{\mathcal{L}}$	0.229 971	rad/j
$n_{\mathcal{L}N}$	Valeur nominale de $n_{\mathcal{L}}$	(10.8)		$4.023 \times 10^{-3}$	$[n_N]$
$\bar{n}_{\mathcal{L}}$	Paramètre (adimensionnel) de perturbation lié à $n_{\mathcal{L}}$	(10.9)	$\bar{n}_{\mathcal{L}} = n_{\mathcal{L}}/n_{\mathcal{L}N}$	1	
$P_n$	Polynôme de Legendre de degré $n$	(1.40)			
$P_{nm}$	Polynôme de Legendre associé, de degré $n$ et d'ordre $m$	(1.40)			
$p_i$	Moments généralisés (satellite)	(3.6)	$(p_{1-3}) = (L, G, H)$		$[n_N R^2]$
$p_i$	Moments généralisés (Terre)	(8.12)	$(p_{4-8}) = (p_{\lambda_{\mathcal{L}}}, \dots, p_F)$		$[n_N R^2]$
$q_i$	Coordonnées généralisées (satellite)	(3.6)	$(q_{1-3}) = (l, g, h)$		
$q_i$	Coordonnées généralisées (Terre)	(8.12)	$(q_{4-8}) = (\lambda_{\mathcal{L}}, D, l_{\odot}, l_{\mathcal{L}}, F)$		
$q_{i0}$	Phase	(8.15)	$q_i = q_{i0} + \omega_i t$		
$R, R_{\mathcal{L}}$	Rayon équatorial lunaire	(1.62)	[Bills and Ferrari, 1980]	$1737.53 \pm 0.03$	km
$R$	Rayon géocentrique de la Lune	(8.17)	$R = d_{\oplus \mathcal{L}} + \Delta R$		
$\mathcal{R}$	Perturbation due à un troisième corps	(8.2)			
$R(r)$	Facteur de $V$ qui dépend de $r$	(1.32)			
$r$	Rayon vecteur du satellite	(1.6)			
$r_a$	Distance à l'apocentre	(1.2)	$r_a = a(1 + e)$		
<i>suite à la page suivante</i>					

<i>suite de la page précédente</i>					
	Définition	Ref.	Note ou source	Valeur	Unités
$r_p$	Distance au péricentre	(1.1)	$r_p = a(1 - e)$		
$\vec{r}_\oplus$	Position de la Terre par rapport à la Lune	(8.1)			
$S$	Fonction génératrice de von Zeipel	(5.34)			
$S_{nm}$	Coefficients du développement en harmoniques sphériques	(1.45)			
$s$	Variable auxiliaire (satellite) liée à $i$	(5.9)	$s = \sin i$		
$T$	Période orbitale du satellite	TAB. 1.2	$nT = 2\pi$		
$T_\zeta$	Période orbitale de la Lune	TAB. 8.1		27.321 661 5	j
$\mathcal{T}$	Hamiltonien lié à la Terre	(8.13)	$\mathcal{T} = \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i$		
$t$	Temps	(1.9)	$M = n(t - \tau)$		
$U$	Latitude géocentrique de la Lune	(8.17)	$U = \Delta U$		
$u$	Anomalie excentrique du satellite	(1.6)			
$V$	Potentiel scalaire	(1.21)	$V = R(r)\Phi(\phi)\Lambda(\lambda)$		
$V$	Longitude géocentrique de la Lune	(8.17)	$V = \lambda_\zeta + \Delta V$		
$V_{20}$	Potentiel en $J_2$	(5.5)			
$V_{22}$	Potentiel en $C_{22}$	(7.1)			
$v_a$	Vitesse à l'apocentre	(1.4)	$v_a^2 = \mu(1 - e)/(a(1 + e))$		
$v_p$	Vitesse au péricentre	(1.3)	$v_p^2 = \mu(1 + e)/(a(1 - e))$		
$\mathcal{W}$	Générateur de la transformation symplectique de Lie	(3.13)			
$x_i$	Coordonnées cartésiennes	(1.22)	$x_i = (x, y, z)$		
$Y_{nm}$	Harmoniques sphériques ( $\mathbb{C}$ )	(1.57)			
$Z_{nm}$	Harmoniques sphériques de surface	(1.45)			
<b>grecques</b>					
$\alpha$	Angle entre le satellite et la Terre	(8.2)	$\angle(\vec{r}, \vec{r}_\oplus)$		
$\alpha^*$	Facteur de l'ordre de $e^2$	(5.25)	$\alpha^* \equiv 1 - \eta$		
$\beta$	Notation de Kozai	(4.3)	$(1 - \eta)/e = e/(1 + \eta)$		
$\gamma$	Paramètre de perturbation terrestre	(2.28)	$\gamma = -\mu_\oplus/d_{\oplus\zeta}^3$	- 0.052 14	rad/j <sup>2</sup>
$\gamma_N$	Valeur nominale de $\gamma$	(10.8)	$\gamma_N = \gamma/n_N^2$	$-1.596 \times 10^{-5}$	$[n_N^2]$
$\bar{\gamma}$	Paramètre (adimensionnel) de perturbation lié à $\gamma$	(10.9)	$\bar{\gamma} = \gamma/\gamma_N$	1	
$\Delta g$	Anomalie gravifique	(1.64)	en $r = R_\zeta$		mGal
$\delta g$	Perturbation gravifique	(1.63)	en $r = R_\zeta + 100$ km		mGal
$\Delta t$	Durée de vie orbitale du satellite lunaire	(9.9)			
$\delta t$	Pas d'intégration	9.2.1			
$\delta$	Paramètre (dimensionnel) de perturbation lié à $C_{22}$	(1.67)	$\delta = -C_{22}R^2$	- 67.496	km <sup>2</sup>
$\bar{\delta}$	Paramètre (adimensionnel) de perturbation lié à $C_{22}$	(10.9)	$\bar{\delta} = C_{22}/C_{22N}$	1	
$\epsilon$	Paramètre (dimensionnel) de perturbation lié à $J_2$	(1.67)	$\epsilon = +J_2R^2$	+ 613.573	km <sup>2</sup>
$\bar{\epsilon}$	Paramètre (adimensionnel) de perturbation lié à $J_2$	(10.9)	$\bar{\epsilon} = J_2/J_{2N}$	1	
$\eta$	Variable auxiliaire (satellite) liée à $e$	(5.9)	$\eta = \sqrt{1 - e^2}$		
$\Lambda(\lambda)$	Facteur de $V$ qui dépend de $\lambda$	(1.32)			
$\Lambda$	Jeu de variables canoniques	(5.1)			
$\lambda$	Longitude	(1.28)			
$\lambda$	Longitude moyenne	(8.11)	$\lambda = l + g + h$		
$\lambda'$	Longitude du satellite	(7.1)			
$\lambda_{22}$	Longitude du plus grand méridien lunaire	(7.1)	$\lambda_{22} = \lambda_\oplus$		
<i>suite à la page suivante</i>					

<i>suite de la page précédente</i>					
	Définition	Ref.	Note ou source	Valeur	Unités
$\lambda_{\zeta}$	Longitude moyenne de la Lune	TAB. 8.1			
$\lambda_{\oplus}$	Longitude moyenne de la Terre	(7.4)			
$\lambda_i$	parité complémentaire	(D.2)	1 pour $i$ pair	1/0	
$\mu, \mu_{\zeta}$	Constante de gravité lunaire	(1.62)	$\mu = \mathcal{G}M$	$4902.799 \pm 0.003$	$\text{km}^3\text{s}^{-2}$
$\mu_{\oplus}$	Constante de gravité terrestre	(8.1)	$\mu_{\oplus} = \mathcal{G}M_{\oplus}$		
$\Xi$	Jeu de variables auxiliaire (non canonique)	(5.8)			
$\xi$	Variable auxiliaire (satellite) liée à $r$	(5.9)	$\xi = a/r$		
$\pi_i$	parité	(D.1)	0 pour $i$ pair	0/1	
$\rho$	Densité	(1.24)			
$\sigma$	Combinaison de fréquences	(3.21)	$\sigma = \sum_{k=1}^n i_k \omega_k$		
$\tau$	Instant de passage au péricentre	(1.9)	$M = n(t - \tau)$		
$\Phi(\phi)$	Facteur de $V$ qui dépend de $\phi$	(1.32)			
$\phi$	Latitude	(1.28)			
$\phi$	Différence entre anomalies (équation du centre)	(4.3)	$\phi = f - l$		
$\chi$	Rapport oblong	TAB. 9.1	$\chi = J_2/C_{22}$		
$\psi$	Différence entre anomalies	(4.3)	$\psi = u - l$		
$\Omega$	Longitude du nœud ascendant de l'orbite du satellite	(1.10)			
$\omega$	Argument du péricentre de l'orbite du satellite	(1.10)			
$\omega_i$	Fréquence	(8.15)	$q_i = q_{i0} + \omega_i t$		

# Chapitre 0

## Introduction

Notre vie sur Terre est amplement rythmée par la Lune, notre seul satellite naturel. La Lune joue le rôle d'un métronome qui délivre différents signaux assez réguliers, les principaux étant liées à des périodes du jour (les marées deux fois par jour) et du mois. Cette horloge a guidé les chronomètres depuis des milliers d'années<sup>1</sup>. L'influence de la Lune sur les cycles terrestres, notamment les marées, a aussi été répertoriée par de nombreuses civilisations de tout temps. Plus de 70 engins artificiels ont été envoyés vers la Lune ; 12 astronautes ont foulé le sol lunaire et ont ramené sur Terre quelques 382 kg d'échantillons de roches lunaires et de sol lunaire.

La présence de la Lune stabilise aussi le mouvement de l'obliquité de la Terre, ce qui a permis d'installer un climat stable sur des millions d'années, propice au développement de la vie. C'est sans doute très utile de le rappeler, c'est d'autant plus à bon escient en cette époque de réchauffement global. Il s'agit en effet de la première fois dans l'Histoire connue de notre Humanité que l'Homme a un effet sur sa planète d'un ordre de grandeur qui vient titiller celui que la Nature a bien voulu nous offrir. Ces problèmes de plus en plus critiques de changements globaux actuels du Climat devraient être selon moi considérés comme étant "Le problème principal du XXI<sup>e</sup> Siècle". La compréhension du comportement de notre planète vivante est une chose cruciale pour la survie de notre espèce et représente un énorme défi planétaire pour lequel il conviendrait de mobiliser la majeure partie de nos efforts, scientifiques, religieux, humains, politiques et culturels.

Quittons un peu notre planète pour revenir à la Lune. On voit fleurir depuis quelques années un tas de projets de conquête lunaire (satellites et bases) [Foing and ILE WG, 2004]. Ceci n'est sans doute pas tout à fait étranger au dernier point évoqué : nous serons peut-être obligés un jour — qui sait — d'aller nous y installer. Personnellement, j'imagine toutefois mal comment on pourrait créer des conditions propices au maintien de notre vie sur la Lune tandis que nous n'aurions pas même été capables de les préserver sur Terre, sous nos propres pieds.

Quoi qu'il en soit, au vu de ces nombreux projets, les besoins en satellites lunaires seront sans nul doute des plus importants. Il est donc clair que l'étude de ces satellites artificiels a encore de beaux jours devant elle. D'autant que la Lune recèle encore des mystères : présence ou non de glace dans le Bassin de Aitken au

---

<sup>1</sup>C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons choisi une illustration qui date de l'Egypte ancienne.



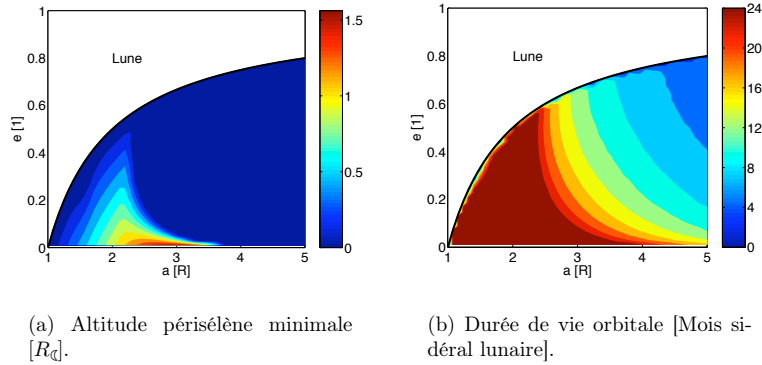
Pôle Sud, mesures encore imprécises du champ de gravité du côté de la face cachée, affinage de la connaissance du noyau, etc. Tout cela sans compter que la Lune est et restera toujours une destination privilégiée, tremplin de l'exploration spatiale plus lointaine.

Par ailleurs, si un jour nous nous développons sur la Lune au même rythme que sur Terre, nous y aurons bientôt des milliers de satellites ! Etudier le vaste ensemble de leurs orbites — ce que l'on nomme *analyse de mission* — risque alors de prendre énormément de temps. L'analyse de mission est pourtant un passage obligé quand on connaît par exemple la tragique histoire du subsatellite d'Apollo 16, qui s'est écrasé sur la Lune à cause du champ de gravité lunaire. La surprise fut générale, car son orbite était pourtant plutôt haute. Nous montrerons dans cette thèse pourquoi une orbite plus basse (demi-grand axe  $a$  plus petit) et équatoriale est préférable (inclinaison  $i$  plus petite) à une orbite plus haute et polaire.

Cela nous amène plus précisément au sujet de notre thèse.

Le but de notre travail est de développer une théorie qui soit valable et efficace dans le cadre de l'analyse de mission, afin d'aboutir à la description de la dynamique globale d'un satellite lunaire.

Nous nous sommes fixés comme objectif de dresser une cartographie complète de la totalité de l'espace de phases correspondant à la dynamique d'un satellite lunaire. Les quantités que nous examinerons seront l'altitude périséle minimale et durée de vie orbitale. Le nombre de paramètres affectant ces quantités étant relativement important (une dizaine), il s'agira de dégager les plus importants afin de pouvoir dresser des cartes aisément manipulables (2D) et représentatives. Les résultats finaux auxquels nous aboutirons seront des cartes de l'espace de phases  $(a, e)$  du genre de celles présentées à la Figure 1.



**FIG. 1** – Altitude périséle minimale et durée de vie orbitale d'un satellite lunaire polaire pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et avec  $(l, g, h, i) = (-, 210^\circ, -, 90^\circ)$ .

Comme il est important que ces cartes soient de bonne qualité, nous nous sommes fixés d'emblée un niveau de précision respectable à atteindre (Hamiltonien  $\mathcal{H}$  à  $10^{-8}$  et  $e$  à  $10^{-3}$ ). Nous aurons à gérer le compromis habituel entre le niveau de précision et le nombre de termes à prendre en compte.

Afin d'élaborer notre modèle de façon optimale, il s'agira entre autres :

1. de prendre en compte les perturbations principales agissant sur le satellite,
2. de veiller à minimiser le temps de calcul pour une orbite donnée, en développant une théorie moyenne, qui permet de grands pas de temps d'intégration,
3. de faire en sorte que cette théorie puisse idéalement rester valable pour la totalité de la gamme de variation des paramètres orbitaux ("forme fermée").

Ce dernier aspect constitue sans conteste un des aspects les plus originaux de cette thèse ; beaucoup de théories en effet sont développées en excentricité ou en inclinaison, la nôtre ne l'est pas.

Or la nécessité de pouvoir disposer d'une théorie valable pour les moyennes et hautes excentricités est bien réelle ; la meilleure preuve en est sans doute le satellite SMART-1 (ESA) actuellement en orbite autour de la Lune (voir annexe J), et qui a une excentricité non négligeable  $e \approx 0.36 \gg 0$ .

Ce n'est toutefois pas le seul aspect original, nous en avons relevés d'autres plus précis :

1. forme fermée (non développée en  $e$  ni en  $i$ ),
2. traitement de plusieurs perturbations de natures différentes,
3. couplages automatiques (triangle automatisé),
4. label de qualité : vérifications automatiques de la moyennisation,
5. résultats extensifs : cartes d'espaces phase  $(a, i)$  très étendues, (jamais vues dans la littérature),
6. automatisation : possibilité de changer l'altitude nominale du satellite pour augmenter la précision.

Dans ce travail, nous avons utilisé la méthode des Transformées de Lie [Deprit, 1969] afin de moyenniser l'Hamiltonien du problème, dans des variables canoniques. La solution est développée en puissance de petits facteurs liés aux différentes perturbations. Les résultats sont obtenus sous forme fermée, sans aucun développement en série de l'excentricité ni de l'inclinaison. La solution s'applique donc à une large gamme de valeurs, excepté pour quelques valeurs critiques isolées.

Les méthodes analytiques ne sont certes pas ultra-précises mais elles ont l'énorme avantage de donner une idée générale de l'ensemble des orbites et donc permettent de choisir un petit domaine où on pourra ensuite calculer quelques orbites précises via d'autres techniques, et choisir la meilleure.

Par ailleurs, la large gamme de variation des paramètres induit le fait que les calculs doivent être les plus rapides possibles, ce qui est bien le cas de notre méthode : si j'avais dû intégrer les équations du mouvement réelles (osculatrices), les simulations auraient duré 7,5 siècles ! Tandis qu'ici elles ont pris 33 h de CPU, tout en satisfaisant les conditions requises de précision.

Remarquons que nous n'avons pas besoin d'une précision sur des siècles mais bien sur le temps typique de la mission lunaire, qui est de 2 ans. Notre but n'est donc pas d'atteindre des ordres élevés tels  $J_2^4$ , mais bien une certaine précision globale (que nous quantifierons).

De plus, afin d'aboutir à un Hamiltonien utilisable dans le cadre d'une analyse de mission, où de nombreuses analyses paramétriques doivent pouvoir être envisagées,

il s'agit qu'il puisse être intégré à l'aide de grands pas de temps et dès lors d'éliminer les courtes et moyennes périodes, pour ne garder que les longues.

Nous classerons les différentes périodes en 3 catégories :

- les *courtes périodes*, correspondant à la période du satellite (de l'ordre de 4 heures, qui seront éliminées dans la Partie II ),
- les *moyennes périodes*, correspondant à la période lunaire (de l'ordre du mois, qui seront éliminées dans la Partie III),
- les *longues périodes*, supérieures ou égales à l'année.

Dans la Partie II, nous traitons d'abord les termes en  $J_2$ , puis en  $C_{22}$  [De Saedeleer, 2004], les termes dus à la perturbation terrestre sont ensuite ajoutés [De Saedeleer and Henrard, 2005]. Les différents effets sont alors étudiés de façon progressive [De Saedeleer B., 2006], et le mécanisme de la hausse de l'excentricité du satellite sous l'effet du troisième corps est mis en évidence. La moyennisation numérique pour la précision globale fixée ( $10^{-8}$ ) clôture cette partie.

La seconde moyennisation est effectuée dans la Partie III où nous réalisons l'analyse paramétrique complète.

# Première partie

## PRÉLIMINAIRES



# Chapitre 1

## La Lune

### 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons quelques aspects plus généraux concernant la Lune.

La surface de la Lune est couverte de cratères, qui sont les vestiges d'impacts fréquents<sup>1</sup> lors de l'histoire primordiale de notre système solaire.

Les résultats de LP (Lunar Prospector) confortent la thèse selon laquelle la Lune s'est formée à partir de débris provenant d'un impact géant d'un corps planétaire de la taille de Mars, qui aurait eu lieu avec la Terre il y a près de 4.5 milliards d'années.

Cette théorie permet d'expliquer, entre autres, pourquoi les roches lunaires (glanées par les missions Apollo) ont les mêmes rapports isotopiques que les roches terrestres, tandis que la Lune semble déficiente en éléments lourds tels le Fer. Cette théorie permet aussi d'expliquer une trouvaille des expériences LP : le noyau lunaire est proportionnellement très petit (en effet, si la Lune s'était formée en même temps que la Terre, dans la nébuleuse solaire primitive, elle devrait avoir un contenu en Fer et une taille relative de noyau similaires). Lors de l'impact, le matériau éjecté de la surface de la Terre devait justement manquer de Fer et d'éléments lourds déjà installés auparavant dans le noyau terrestre. Une fraction de ce nuage de débris serait resté en orbite autour de la Terre et aurait finalement formé la Lune.

Par ailleurs, la technique du LLR, qui est actuellement précise à 2 cm près, a permis de mesurer un écart par rapport à l'état de Cassini d'une amplitude de 0.2

---

<sup>1</sup>La Lune continue à être la cible d'impacts, mais plus mineurs bien entendu que par le passé. Le Satellite LO-IV a d'ailleurs enregistré 22 impacts au cours d'une expérience sur les micrométéorites, ce qui montre un flux moyen environ 100 fois supérieur à celui du milieu interstellaire, mais juste un peu moins que près de la Terre. Le dernier impact à avoir été observé date du 7 novembre 2005 et avait tout de même l'énergie de 70 kg de TNT environ, ce qui peut déjà causer pas mal de dégâts. Cette météorite d'une taille de 12 cm a impacté le sol lunaire près du bord de la Mer des Pluies (MARE IMBRIUM). Il s'agit très probablement (99%) d'un Tauride, une des pluies d'étoiles filantes terrestres qui s'étend de fin octobre à début novembre. La vitesse d'impact était de 27 km/s. Cet impact a été détecté par la NASA lors de la mise en place d'un système automatique de surveillance d'impacts lunaires dès la première nuit de fonctionnement — ce qui donne une idée de la fréquence élevée des impacts. Des astronomes amateurs en ont déjà relevé plusieurs par hasard, mais la nécessité d'un programme de surveillance automatique se fait de plus en plus ressentir au moment où de nombreux projets de base lunaire voient le jour, avec séjours prolongés sur la Lune et donc plus de risques de dégâts sur le matériel et les engins spatiaux.

arcsec dans la position moyenne de l'axe de rotation lunaire. Cet écart est représentatif des processus dissipatifs qui ont lieu à l'intérieur de la Lune et a mené à la découverte que la Lune a un petit noyau liquide [Williams et al., 2006].

La Lune est le seul satellite naturel de la Terre ; ses caractéristiques principales sont reprises à la Table 1.1. Notons que la période lunaire de 18.6 ans peut être détectée grâce à l'étude des éclipses totales solaires (voir Figure 1.1) ainsi que via les marées océaniques.

	signification	valeur
$M$	Masse de la Lune	$7.348 \times 10^{22}$ kg
$\mu$	Constante de gravité lunaire	$4902.799 \pm 0.003$ km <sup>3</sup> s <sup>-2</sup>
$R$	Rayon équatorial lunaire	$1737.53 \pm 0.03$ km
$T_{\zeta}$	Période sidérale lunaire	27.321 661 5 j
$i_{\zeta}$	Inclinaison de l'orbite lunaire	5.145°
$J_2$	Aplatissement dynamique	$2.032366 \times 10^{-4}$
$C_{22}$	Elongation	$22.357 \times 10^{-6}$
$M_{\oplus}/M_{\zeta}$	Rapport de masses Terre/Lune	81.300 8
$T_{\Omega}$	Période de précession du nœud lunaire	18.6 ans

TAB. 1.1 – Quelques grandeurs caractéristiques de la Lune.

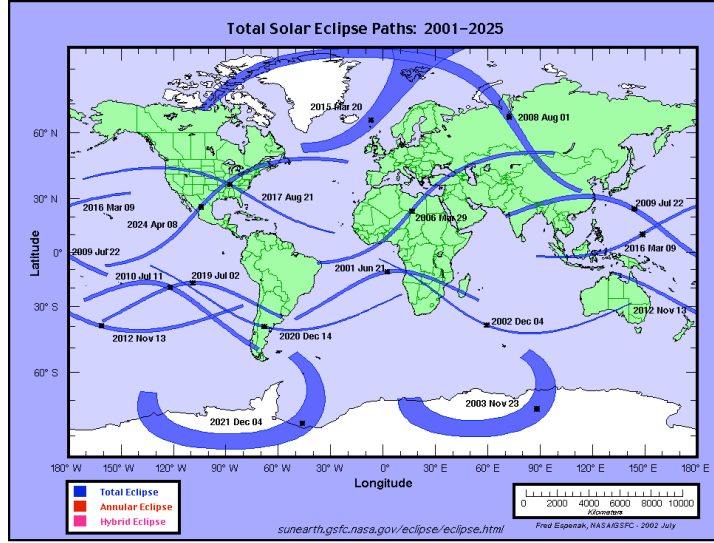
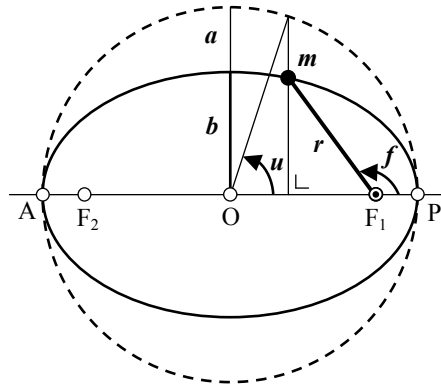


FIG. 1.1 – Traces sur la surface du globe terrestre des éclipses totales de Soleil pour la période 2001–2025. On y voit clairement la périodicité de  $\approx 18$  ans, due à la précession du nœud de l'orbite lunaire.

## 1.2 Le problème des 2 corps

Nous exposons ici brièvement l'essence du problème des 2 corps (sous forme de formulaire directement, car les détails sont abordés dans maints ouvrages de base), que nous particulariserons ensuite au cas Lune-Satellite. Nous en profitons pour présenter une vue graphique plus personnelle des anomalies, donner les ordres de grandeur caractéristiques du problème du satellite lunaire, et aborder les aspects numériques de la résolution de l'équation de Kepler.



$$r_p = a(1 - e) \quad (1.1)$$

$$r_a = a(1 + e) \quad (1.2)$$

$$v_p^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 + e}{1 - e} \quad (1.3)$$

$$v_a^2 = \frac{\mu}{a} \frac{1 - e}{1 + e} \quad (1.4)$$

$$r \cos f = a(\cos u - e) \quad (1.5)$$

$$r \sin f = b \sin u \quad (1.6)$$

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{u}{2} \quad (1.7)$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f} \quad (1.8)$$

$$M = u - e \sin u = n(t - \tau) \quad (1.9)$$

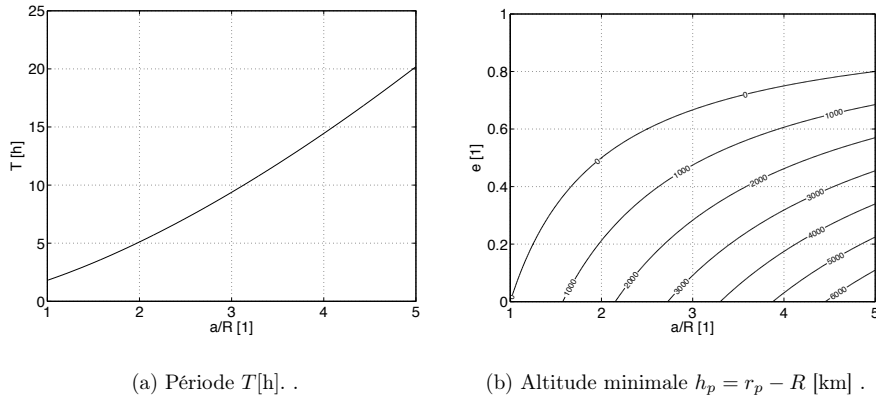
FIG. 1.2 – L'ellipse en 2D : définition des anomalies et relations fondamentales.

symbole	signification	relation
$F_1, F_2$	foyers de l'ellipse	
$M_1$	masse du corps attracteur (en $F_1$ )	$M_1 \gg m$
$\mathcal{G}$	constante universelle de la Gravitation	
$\mu$	constante de gravitation associée à $M_1$	$\mu = \mathcal{G}M_1$
$\vec{r}$	rayon-vecteur du satellite (de masse $m$ )	
$P$	péricentre	
$A$	apocentre	
$a$	demi-grand axe	
$e$	excentricité	$ae =  F_1O $
$b$	demi-petit axe	$b = a\sqrt{1 - e^2}$
$r_p$	distance au péricentre	$r_p =  F_1P $
$r_a$	distance à l'apocentre	$r_a =  F_1A $
$v_p$	vitesse au péricentre	
$v_a$	vitesse à l'apocentre	
$f$	anomalie vraie	
$u$	anomalie excentrique	
$M$	anomalie moyenne	
$\tau$	instant de passage au péricentre $P$	
$n$	moyen mouvement angulaire	$n^2 a^3 = \mu$
$T$	période orbitale	$nT = 2\pi$

TAB. 1.2 – Nomenclature à 2 corps - version 2D.

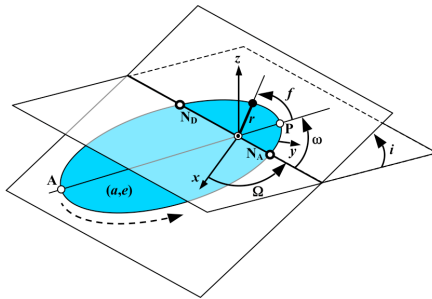


On peut considérer en toute première approche l'orbite<sup>2</sup> du satellite lunaire comme étant un problème à 2 corps (le satellite et la Lune). Même si cette approximation ne tiendra pas bien longtemps la route (à cause de la non-sphéricité de la Lune et de la proximité de la Terre), elle permet cependant de fixer les ordres de grandeur du problème du satellite lunaire. Nous présentons à la Figure 1.3(a) le graphe de la période  $T$  d'un satellite lunaire en fonction de  $a/R$  ( $R = R_{\text{L}} = 1738$  km) : les satellites en orbite basse ( $h < 100$  km) ont une période d'environ 2 h ; qui peut monter à 20 h pour  $a/R = 5$ . La Figure 1.3(b) donne l'altitude ( $h_p = r_p - R$ ) du périséle en fonction de  $e$  et  $a/R$  : le satellite lunaire percute le sol pour une excentricité maximale qui vaut  $e_{\text{max}} = 1 - R/a$  ; c'est clairement ce qui limitera la durée de vie orbitale d'un satellite, qui verrait son excentricité croître trop fortement pour l'une ou l'autre raison (voir §9.3).



**FIG. 1.3** – Ordres de grandeur (période, altitude minimale) pour un satellite lunaire.

Une fois l'ellipse définie (via  $a, e, M$ ), il reste à définir son orientation dans l'espace : il faut alors introduire les angles  $i, \omega$  et  $\Omega$  ( voir Figure 1.4).



(a) Définition des éléments képlériens ( $a, e, i, \omega, \Omega, M$ ).

symbole	signification
$i$	inclinaison
$N_A N_D$	ligne des nœuds
$N_A$	nœud ascendant
$N_D$	nœud descendant
$\Omega$	longitude du nœud $N_A$
$\omega$	argument du péricentre $P$

(b) Nomenclature à 2 corps - version 3D.

**FIG. 1.4** – L'ellipse en 3D : définition des angles ( $i, \omega, \Omega$ ).

<sup>2</sup>Nous ne considérons dans ce travail que le cas d'une orbite périodique ( $0 \leq e < 1$ ).

On peut alors calculer les formules de projection de  $\vec{r}$  suivant les axes ( $F_1$  étant placé à l'origine) :

$$\begin{aligned} x &= r[\cos(f + \omega) \cos \Omega - \sin(f + \omega) \cos i \sin \Omega] \\ y &= r[\cos(f + \omega) \sin \Omega + \sin(f + \omega) \cos i \cos \Omega] \\ z &= r \sin(f + \omega) \sin i \end{aligned} \quad (1.10)$$

qui nous seront utiles par la suite.

Considérons plus en détails la relation de Kepler dont nous aurons également besoin lors de la mise au point de la théorie :

$$M = u - e \sin u \quad (1.11)$$

La relation  $M(u)$  est directe, tandis que  $u(M)$  est une équation transcendante ; sa résolution a fait s'envoler l'imagination de chercheurs et mathématiciens de tout temps (dont Laplace en particulier). Un très grand nombre de solutions analytiques et graphiques (comme p.ex. [Plummer, 1896]) ont d'abord été découvertes, avant l'avènement du numérique. Le "Bulletin Astronomique" de Janvier 1900 contient la référence de 123 papiers qui auraient été écrits sur ce sujet [Danby and Burkardt, 1983]. On peut par exemple trouver dans [Stevens, 1998] le dessin d'un nomogramme ; nous l'avons recalculé et reproduit à la Figure 1.5(a). Une même droite lie les valeurs de  $M, u, e$  : on peut donc déterminer une de ces 3 quantités à partir des 2 autres, ce qui permet de résoudre graphiquement l'équation de Kepler.

Nous présentons aussi à la Figure 1.5(b) une vue graphique plus personnelle de la relation entre les anomalies. Nous avons représenté dans le plan polaire  $(r, \theta) \equiv (e, M)$ , les courbes " $u = cste$ " (en bleu) et " $f = cste$ " (en rouge). On y voit clairement qu'aux faibles excentricités (près du centre du cercle), la différence entre les anomalies s'estompe, tandis qu'à plus forte excentricité (près du bord du cercle) les différences deviennent vite très significatives.

Dans le cadre de notre théorie, nous aurons bien sûr besoin d'une routine de résolution numérique de l'équation de Kepler quand nous intégrerons le mouvement osculateur du satellite lunaire (voir Chapitre 9).

La résolution numérique rencontre néanmoins des problèmes tels que le choix d'une estimation initiale et l'efficacité de la méthode (vitesse de convergence numérique). Numériquement, on résout  $u(M)$  en essayant de trouver la racine de la fonction  $F(u)$  :

$$F(u) = u - e \sin u - M \quad (1.12)$$

ce qui peut se faire de manière itérative :

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad (1.13)$$

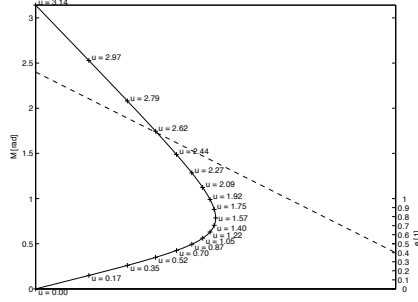
à partir de la condition initiale  $u_0$ .

On peut d'abord tenter la méthode de Newton-Raphson :

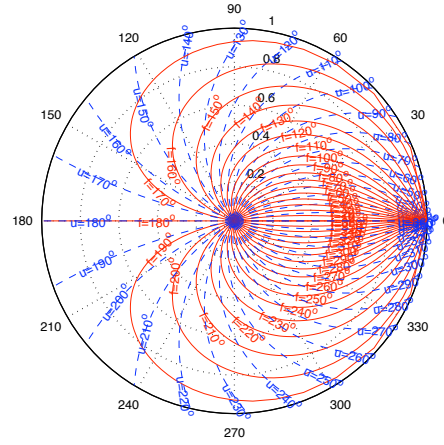
$$\Delta u_i = -\frac{F_i}{F'_i} \quad \text{avec} \quad F'(u) = 1 - e \cos u \quad \text{et} \quad F^{(n)}(u_i) \stackrel{\text{not}}{=} F_i^{(n)} \quad (1.14)$$

mais elle ne converge pas très rapidement car elle n'est que d'ordre 1 (elle n'utilise que la dérivée première de  $F$ ). Il vaut mieux implémenter une méthode d'ordre supérieur, comme par exemple celle décrite dans [Murray and Dermott, 1999], qui est d'ordre 3 :

$$\delta_{i1} = -\frac{F_i}{F'_i} \quad \delta_{i2} = -\frac{F_i}{F'_i + \delta_{i1}F''_i/2} \quad \delta_{i3} = -\frac{F_i}{F'_i + \delta_{i2}F''_i/2 + \delta_{i2}^2F'''_i/6} \quad \Delta u_i = \delta_{i3} \quad (1.15)$$

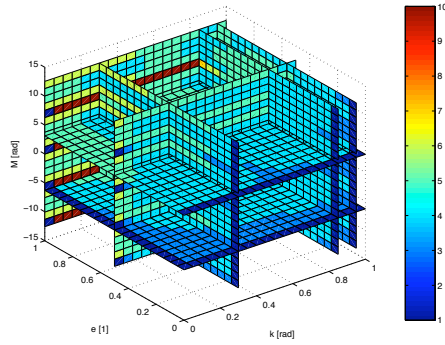


(a) Nomogramme de l'équation de Kepler. Une même droite lie les valeurs de  $M$ ,  $u$  et  $e$ .

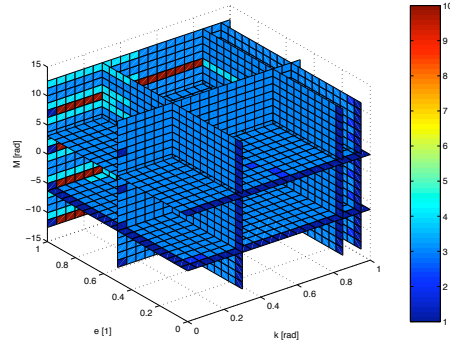


(b) Dans le plan polaire  $(r, \theta) = (e, M)$ , on trace les courbes " $u = cste$ " (en bleu) et " $f = cste$ " (en rouge).

FIG. 1.5 – Relations entre anomalies, via l'excentricité.



(a) Méthode d'ordre 1.



(b) Méthode d'ordre 3.

FIG. 1.6 – Nombre d'itérations nécessaires pour résoudre numériquement l'équation de Kepler (avec une précision  $< 10^{-14}$ ) en fonction de  $e$ ,  $k$  et  $M$ .

Quant au choix de l'estimation initiale  $u_0$ , [Danby, 1988] suggère de prendre

$$u_0 = M + \text{sign}(\sin M)k e \quad 0 \leq k \leq 1 \quad (1.16)$$

avec  $k = 0.85$  de préférence. Des détails de discussions sur ces différentes méthodes peuvent être trouvés par exemple dans [Danby and Burkardt, 1983, Burkardt and Danby, 1983, Danby, 1987]. Il existe de nombreuses méthodes qui rivalisent d'ingéniosité pour avoir une estimation initiale  $u_0$  optimale, comme par exemple un développement en série de fonctions de Bessel, dont on prendra seulement les premiers termes. Dans le cas de développements en série, il faut prendre garde à ce qu'ils convergent<sup>3</sup>; dans ce travail, nous n'effectuerons donc aucun développement en séries.

Afin d'optimiser notre routine, nous avons testé les deux méthodes précitées et présentons les résultats sous forme de graphique 4D à la Figure 1.6 : nous avons reporté pour chacune des 2 méthodes le nombre d'itérations nécessaires pour résoudre numériquement l'équation de Kepler avec une précision  $< 10^{-14}$ , en fonction de toutes les valeurs possibles de  $e, k$  et  $M$ .

On voit clairement que la méthode d'ordre 3 (Figure 1.6(b)) converge bien plus rapidement que la méthode d'ordre 1 (Figure 1.6(a)). Par ailleurs, pour la méthode d'ordre 1, la difficulté de convergence numérique se fait sentir de façon croissante avec les excentricités élevées, tandis qu'elle est quasi constante pour la méthode d'ordre 3. Pour cette dernière méthode, la dépendance en  $k$  semble très faible. En outre, le cas ( $e = 1, k \neq 0$  et  $M = 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$ ) semble toujours poser problème; ce qui n'a heureusement que peu de conséquences pour l'usage que nous ferons de cette routine ( $0 \leq e < 1$ ).

Revenons-en à présent à la théorie du satellite artificiel que nous présentons. C'est une théorie des perturbations du problème des 2 corps; dès lors nous aurons un grand usage de toutes les relations associées. Elles serviront, par exemple, à calculer les dépendances de notre jeu particulier  $\Xi$  de variables (5.8) par rapport aux variables de Delaunay. Les équations 1.5 et 1.6 seront alors réexprimées dans ce jeu de variables  $\Xi$  (qui contient entre autres  $\xi = \frac{a}{r}, \eta = \sqrt{1 - e^2}$ ) :

$$\xi^{-1} \sin f = \eta \sin u \quad (1.17)$$

$$\xi^{-1} \cos f = \cos u - e \quad (1.18)$$

Par ailleurs, nous travaillerons dans le cadre canonique des équations hamiltoniennes; nous utiliserons les variables canoniques classiques de Delaunay  $(q_i, p_i) = (l, g, h, L, G, H)$  définies comme suit :

$$\begin{cases} l &= M = u - e \sin u & L &= \sqrt{\mu a} \\ g &= \omega & G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\ h &= \Omega & H &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i \end{cases} \quad (1.19)$$

Dans ces variables, le terme central à 2 corps s'écrit simplement :

$$\mathcal{H}_{2B} = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad (1.20)$$

A ce stade, il est bon de faire une remarque importante quant aux singularités éventuelles en excentricité ou en inclinaison pouvant apparaître dans les séries. La théorie présentée ici n'est pas singulière : ce sont les coordonnées qui le sont. Cette singularité est donc toute virtuelle [Henrard, 1974] : il suffit d'effectuer un simple

<sup>3</sup>Par exemple, le développement de  $u - M$  en série entière de  $M$  diverge pour des excentricités  $e > e_L$  où la limite de Laplace vaut  $e_L \approx 0.66274342$  [Moulton, 1970, pp. 171–2].

changement de coordonnées afin de s'en affranchir, comme en prenant par exemple  $e \cos g$  qui est une variable non singulière possédant la caractéristique de d'Alembert. Les transformées de Lie conservant la propriété de d'Alembert, le développement de toute fonction non singulière sera non singulière, et on pourra ainsi aisément supprimer les singularités à n'importe quel stade de la moyennisation ; en particulier par exemple au dernier stade.

### 1.3 Champ de gravité et harmoniques sphériques

Le champ de gravité lunaire est loin d'être central. Les premiers mascons lunaires ont été découverts en 1968 [Muller and Sjogren, 1968], et la non-centralité du champ de gravité a ensuite été confirmé par des mesures plus précises et l'apparition de modèles de degré de plus en plus élevé ([Bills and Ferrari, 1980], [Lemoine et al., 1997], [Konopliv et al., 2001]), en harmoniques sphériques (voir par exemple [Floborghagen et al., 1996] pour un résumé). Le modèle le plus récent actuellement est celui de [Konopliv et al., 2001].

Il y a différents formalismes possibles pour décrire un champ de gravité, chacun étant plus ou moins adapté à une finalité donnée : les harmoniques sphériques ou ellipsoïdaux [Garmier and Barriot, 2001], ou d'autres formulations plus localisées (ondelettes [Chambodut et al., 2005], masses concentrées [Balmino, 1974]), etc. J'ai choisi d'utiliser la description en harmoniques sphériques, car c'est la forme la plus communément utilisée ; elle est également sans doute la plus adaptée au développement d'une théorie analytique. La Lune est du reste un corps assez sphérique (même s'il faut tout de même beaucoup d'harmoniques si on souhaite de la précision), et n'a pas la forme irrégulière de certains corps du Système Solaire, tel le satellite Phobos ou l'astéroïde-banane Eros [Miller et al., 2002], pour lesquels les harmoniques sphériques conviennent vraiment mal.

Je reprendrai ici les étapes essentielles qui amènent à leur construction et en profiterai pour souligner les postulats sous-jacents. Les développements ont été effectués à partir de [Kaula, 1966], bien que l'origine soit plus ancienne (Legendre).

Considérons tout d'abord le cas de 2 masses ponctuelles  $M$  et  $m_g$  distantes de  $r$ . Le potentiel<sup>4</sup> scalaire  $V$  est donné<sup>5</sup> par

$$V = \frac{\mu}{r} \quad \text{avec} \quad \mu = \mathcal{G}M \quad (1.21)$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  et où  $\mathcal{G}$  est la constante universelle de la gravitation (voir Table 1).

En dérivant une première fois le potentiel par rapport à  $x_i = x, y$  ou  $z$ , on obtient l'accélération  $\vec{a} = -\vec{\nabla}V$ , et en dérivant une seconde fois, on obtient (1.22), et ensuite l'équation de Laplace (1.23).

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \mu \left( \frac{3x_i^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) \quad (1.22)$$

$$\Delta V = \nabla^2 V = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = 0 \quad (1.23)$$

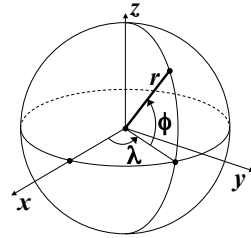
<sup>4</sup>Il y a souvent une différence de signe entre le potentiel des physiciens et celui des astronomes, mais ce n'est qu'un problème de définition.

<sup>5</sup>Notons que la forme du potentiel (1.21) suppose que la masse gravitationnelle (ou grave)  $m_g$  est égale à la masse inertielle  $m_i$ . Cette question d'équivalence des masses est loin d'être triviale. Einstein l'a postulée ("*Principe d'Equivalence*"), mais il ne s'agit toujours que d'un fait constaté et non d'un principe à proprement parler ; les tests observationnels la donnent vraie à  $10^{-12}$  près actuellement (via la mesure de la distance Terre-Lune) ; d'autres projets spatiaux tels que MICROSCOPE [Touboul et al., 2002] (en 2007 ?) ont l'ambition d'atteindre une précision d'au moins  $10^{-15}$ , voire  $10^{-18}$ , en exploitant une très longue chute libre, égale à plusieurs fois la période orbitale d'un satellite, d'objets de composition différente. Une violation du Principe d'Equivalence (à un niveau très faible), bien qu'un peu troublante, pourrait s'avérer salutaire pour les théories d'unification.

Si on considère à présent un corps continu (non ponctuel), de densité volumique variable  $\rho(x, y, z)$ , le potentiel est alors défini par :

$$V = \mathcal{G} \iiint \frac{\rho(x, y, z)}{r(x, y, z)} dx dy dz \quad (1.24)$$

Notons que la caractéristique du Laplacien nul reste toujours valable localement, et donc pour le corps en entier. Toute fonction scalaire dont le Laplacien est identiquement nul en tout point de l'espace est appelée *fonction harmonique*; le potentiel de gravitation  $\frac{\mu}{r}$  est harmonique<sup>6</sup>. Une fonction harmonique présente l'avantage de pouvoir être exprimée de façon simple quand elle est transformée en coordonnées sphériques (rayon  $r$ , longitude  $\lambda$ , latitude  $\phi$ , voir Figure 1.7). C'est ce que nous montrons brièvement ci-dessous.



$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \cos \lambda \\ y &= r \cos \phi \sin \lambda \\ z &= r \sin \phi \end{aligned} \quad (1.28)$$

**FIG. 1.7** – Définition des coordonnées sphériques (rayon  $r$ , longitude  $\lambda$ , latitude  $\phi$ ).

Réécrivons tout d'abord  $\Delta V = 0$  en coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \phi)$  au lieu de cartésiennes  $(x, y, z)$ . Pour cela, on calcule l'inverse de la Jacobienne  $J$  (1.29) de la transformation de coordonnées (1.28), afin d'exprimer en fonction des coordonnées sphériques les dérivées partielles  $\frac{\partial V}{\partial x_i}$  (1.30) et ensuite  $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}$  et  $\Delta V$ , par d'autres relations plus complexes.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} dr \\ d\phi \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad J = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda & -r \sin \phi \cos \lambda & -r \cos \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda & -r \sin \phi \sin \lambda & r \cos \phi \cos \lambda \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} & \frac{\partial V}{\partial \phi} & \frac{\partial V}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \\ -\frac{\sin \phi \cos \lambda}{r} & -\frac{\sin \phi \sin \lambda}{r} & \frac{\cos \phi}{r} \\ -\frac{\sin \lambda}{r \cos \phi} & \frac{\cos \lambda}{r \cos \phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

<sup>6</sup>A cet égard il faut signaler que ce n'est le cas qu'en 3D pour ce potentiel. On peut en effet étendre le calcul à un potentiel de forme générale  $U = \mu/r^\alpha$ , et à  $n$  dimensions ( $r = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ); on obtient alors (1.25)–(1.27), où le Laplacien est nul quand  $n = \alpha + 2$ . Nous vivons dans un monde où  $n = 3$  et  $\alpha = 1$ ; étrange coïncidence? Toute modification éventuelle de la loi du potentiel de gravitation risquerait fort d'anéantir cette propriété de Laplacien nul.

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\mu \alpha r^{-(\alpha+2)} x_i \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \mu \alpha \left( (\alpha + 2) r^{-(\alpha+4)} x_i^2 - r^{-(\alpha+2)} \right) \quad (1.26)$$

$$\Delta U = \nabla^2 U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} = \mu \alpha r^{-(\alpha+2)} ((\alpha + 2) - n) \quad (1.27)$$

Le résultat final est le suivant :

$$r^2 \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \cos \phi \frac{\partial V}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \phi} \frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} = 0 \quad (1.31)$$

Tentons à présent d'exprimer  $V$  sous la forme séduisante de produit de fonctions à variables séparées :

$$V = R(r) \Phi(\phi) \Lambda(\lambda) \quad (1.32)$$

En remplaçant (1.32) dans (1.31), et en divisant par  $R\Phi\Lambda$ , on obtient :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Phi \cos \phi} \frac{d}{d\phi} \left( \cos \phi \frac{d\Phi}{d\phi} \right) + \frac{1}{\Lambda \cos^2 \phi} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0 \quad (1.33)$$

Le premier terme de (1.33) étant le seul à être une fonction de  $r$ , il est donc constant ; on le pose égal à  $n(n+1)$ . En développant ce terme, on obtient :

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0 \quad (1.34)$$

qui suggère que  $R$  serait de la forme  $r^k$ . En posant donc  $R = r^k$ , (1.34) se réduit à une équation du second degré en  $k$ , dont les solutions sont  $n$  et  $-(n+1)$ , d'où la forme générale :

$$R = A^* r^n + B^* r^{-(n+1)} \quad (1.35)$$

$A^*$  et  $B^*$  étant des constantes arbitraires. Comme le potentiel doit être nul à l'infini,  $A^* = 0$ .

On reprend ensuite (1.33), avec le terme en  $R$  remplacé par  $n(n+1)$ , que l'on multiplie par  $\cos^2 \phi$  afin d'isoler  $\Lambda$  cette fois :

$$n(n+1) \cos^2 \phi + \frac{\cos \phi}{\Phi} \frac{d}{d\phi} \left( \cos \phi \frac{d\Phi}{d\phi} \right) + \frac{1}{\Lambda} \frac{d^2 \Lambda}{d\lambda^2} = 0 \quad (1.36)$$

À présent, c'est le terme en  $\Lambda$  qui est constant, on le pose égal à  $(-m^2)$  ; on a donc :

$$\Lambda = C \cos(m\lambda) + S \sin(m\lambda) \quad (1.37)$$

avec  $C$  et  $S$  arbitraires. Pour terminer, on remplace le terme en  $\Lambda$  par  $(-m^2)$  et on multiplie par  $\frac{\Phi}{\cos^2 \phi}$  ; on obtient alors une équation en  $\phi$  seulement :

$$\frac{1}{\cos \phi} \frac{d}{d\phi} \left( \cos \phi \frac{d\Phi}{d\phi} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\cos^2 \phi} \right] \Phi = 0 \quad (1.38)$$

soit en posant  $\sigma = \sin \phi$  :

$$\frac{d}{d\sigma} \left( (1 - \sigma^2) \frac{d\Phi}{d\sigma} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \sigma^2} \right] \Phi = 0 \quad (1.39)$$

Dans le cas où  $m = 0$ , l'équation (1.39) est l'équation de Legendre, qui a pour solution  $\Phi = P_n(\sigma)$ , le polynôme de Legendre de degré  $n$  :

$$P_n(\sigma) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\sigma^n} (\sigma^2 - 1)^n \quad (1.40)$$

et dans le cas où  $m \neq 0$ , la solution est le polynôme de Legendre associé, de degré  $n$  et d'ordre  $m$  (avec  $m \leq n$ ) :

$$P_{nm}(\sigma) = (1 - \sigma^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\sigma^m} P_n(\sigma) \quad (1.41)$$

Une bonne référence est [Gradshteyn and Ryzhik, 1980] : on peut y trouver aux §8.912 et §8.813 l'expression explicite des premiers  $P_n$  et  $P_{nm}$  respectivement. Il existe aussi des formulations sous forme développée ; celle de  $P_n(\sigma)$  peut être trouvée



au §8.911 1. :

$$P_n(\sigma) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \sigma^{n-2k} \quad (1.42)$$

tandis que celle de  $P_{nm}(\sigma)$  est similaire et peut être trouvée dans [Kaula, 1966] :

$$P_{nm}(\sigma) = (1-\sigma^2)^{m/2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} T_{nmk} \sigma^{n-m-2k} \quad (1.43)$$

$$\text{avec } T_{nmk} = \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-m-2k)!} \quad (1.44)$$

où  $\lfloor n \rfloor$  est la partie entière inférieure de  $n$ . Il existe aussi des formules de récurrence pour les  $T_{nmk}$  ou pour les  $P_{nm}$ . A cet égard, il faut être prudent quand il s'agit d'implémenter ces polynômes numériquement : certains algorithmes sont plus stables que d'autres (voir Chapitre 6).

En rassemblant les contributions en  $\Lambda(\lambda)$  (1.37) et en  $\Phi(\phi) = P_{nm}(\sigma = \sin \phi)$  (1.41), on obtient les harmoniques sphériques de surface  $Z_{nm}(\lambda, \phi)$  :

$$Z_{nm}(\lambda, \phi) = P_{nm}(\sin \phi) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1.45)$$

où  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  sont les coefficients du développement en harmoniques sphériques. En ajoutant ensuite la contribution en  $R(r)$  (1.35), on aboutit à l'expression générale du potentiel en harmoniques sphériques de volume (on peut poser  $B^* = \mu$ ) :

$$V = \frac{\mu}{r} \sum_{nmi} \frac{1}{r^n} Z_{nmi}(\lambda, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n} \sum_{m=0}^n P_{nm}(\sin \phi) [C_{nm} \cos(m\lambda) + S_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1.46)$$

$N$  étant le degré maximum considéré pour le développement, et l'indice  $i$  représentant soit le terme en  $\cos(m\lambda)$ , soit le terme en  $\sin(m\lambda)$ .

Les harmoniques sphériques de surface  $Z_{nm}(\lambda, \phi)$  possèdent une propriété importante : celle d'orthogonalité (1.47), ce qui en fait un moyen naturel pour une représentation générale d'une fonction définie sur la sphère, de façon analogue aux séries de Fourier en coordonnées cartésiennes.

$$\iint_{\text{Sphère}} Z_{nmi}(\lambda, \phi) Z_{hkj}(\lambda, \phi) dA = 0 \quad \text{si } (n \neq h \text{ ou } m \neq k \text{ ou } i \neq j) \quad (1.47)$$

où  $dA$  est l'élément d'aire. La topographie lunaire (voir Figure 1.13) peut par exemple également s'exprimer via des harmoniques sphériques  $h = h(\lambda, \phi)$ .

Par ailleurs, pour le cas  $(n, m, i) = (h, k, j)$ , on a (en posant  $C_{nm} = S_{nm} = 1$ ) :

$$\iint_{\text{Sphère}} Z_{nmi}^2(\lambda, \phi) dA = \alpha_{nm} 4\pi \quad (1.48)$$

$$\text{avec } \alpha_{nm} = \frac{(n+m)!}{(n-m)!(2n+1)(2-\delta_{0m})} \quad (1.49)$$

$\delta_{0m}$  vaut 1 pour  $m = 0$  et 0 sinon. On voit que le facteur  $\alpha_{nm}$  peut varier grandement ; il est alors judicieux de procéder à une normalisation des fonctions  $Z_{nm}(\lambda, \phi)$  (et donc des coefficients) suivant (1.50) – (1.53).

$$\bar{Z}_{nm}(\lambda, \phi) = \bar{P}_{nm}(\sin \phi) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1.50)$$

$$\text{avec } \bar{P}_{nm} = P_{nm} / \sqrt{\alpha_{nm}} \quad (1.51)$$

$$\text{et } \bar{C}_{nm} = C_{nm} \sqrt{\alpha_{nm}} \quad (1.52)$$

$$\text{et } \bar{S}_{nm} = S_{nm} \sqrt{\alpha_{nm}} \quad (1.53)$$

On peut éventuellement également effectuer une normalisation supplémentaire (1.54) – (1.55) suivant  $r$  (facteur  $R^n$ ,  $R$  dénotant dorénavant le rayon équatorial du corps attracteur), ce qui permet de rendre les coefficients sans dimension (on les notera alors  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$ ).

$$\bar{C}_{nm} = \bar{C}_{nm}/R^n \quad (1.54)$$

$$\text{et } \bar{S}_{nm} = \bar{S}_{nm}/R^n \quad (1.55)$$

On définit souvent plus formellement les harmoniques sphériques  $Y_{nm}(\lambda, \phi)$  comme une quantité complexe, sur base des  $\bar{Z}_{nm}(\lambda, \phi)$ , en prenant  $\bar{C}_{nm} = \bar{S}_{nm} = 1$ , et en normant de plus par  $\sqrt{4\pi}$  (voir (1.48)), de façon à avoir :

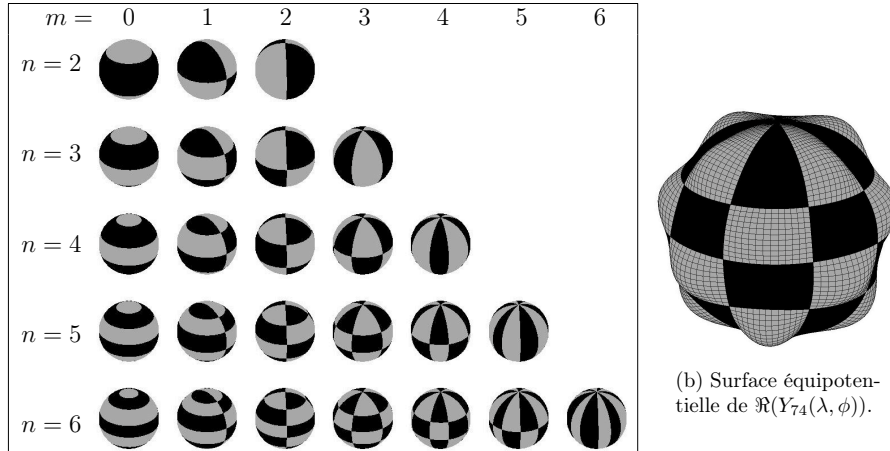
$$\iint_{\text{Sphère}} Y_{nm}^2(\lambda, \phi) dA = 1 \quad (1.56)$$

ce qui nous conduit à la définition :

$$Y_{nm}(\lambda, \phi) = \frac{\bar{P}_{nm}(\sin \phi)}{\sqrt{4\pi}} e^{im\lambda} \quad (1.57)$$

Nous présentons à la Figure 1.8 une visualisation des harmoniques sphériques  $Y_{nm}(\lambda, \phi)$ . On notera que  $Y_{nm}(\lambda, \phi)$  possède  $(n - m)$  zéros le long d'un méridien et  $m$  zéros uniformément répartis le long d'un demi-parallèle. Les  $Y_{n0}$  sont appelés *zonaux*, les  $Y_{0m}$  *sectoriaux*, et les autres *tesseraux*. On utilise souvent la notation :

$$J_n = -C_{n0} \quad (1.58)$$



(a) Allure des premiers harmoniques sphériques. Pour clarifier la représentation, on a colorié chaque sphère suivant le signe de  $\Re(Y_{nm}(\lambda, \phi))$ .

**FIG. 1.8** – Les harmoniques sphériques  $Y_{nm}(\lambda, \phi)$  de degré  $n$  et d'ordre  $m$  découpent la sphère suivant un quadrillage orthogonal régulier : en  $(n - m + 1)$  zones ( $(n - m)$  zéros en  $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) et en  $2m$  secteurs ( $2m$  zéros en  $\lambda \in [0, 2\pi]$ ). Valeurs de  $\Re(Y_{nm}(\lambda, \phi))$  : négatives en noir, positives en gris.

Considérons les premiers harmoniques. Le terme de degré 0 correspond à une masse ponctuelle, et les termes de degré 1 peuvent être annulés si on se place au centre de masse. Les termes de degré 2 sont particulièrement intéressants car ils

peuvent être reliés à la matrice d'inertie du corps attracteur, via les relations suivantes [Zarrouati, 1987] :

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} = MR^2 \begin{bmatrix} C_{20}/3 - 2C_{22} & -2S_{22} & -C_{21} \\ -2S_{22} & C_{20}/3 + 2C_{22} & -S_{21} \\ -C_{21} & -S_{21} & -2C_{20}/3 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$M$  étant la masse et  $R$  le rayon du corps attracteur. Ces relations se simplifient en diagonalisant la matrice d'inertie (en choisissant les axes principaux d'inertie comme axes de coordonnées, on a  $C_{12} = S_{12} = S_{22} = 0$ ), ce qui donne lieu aux relations classiques :

$$C_{20} = \frac{A + B - 2C}{2MR^2} \quad C_{22} = \frac{B - A}{4MR^2} \quad (1.60)$$

$A < B < C$  étant les moments d'inertie principaux. Le coefficient  $C_{20}$  reflète le degré d'aplatissement du corps, et  $C_{22}$  l'ellipticité équatoriale. La détermination des coefficients  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$  se fait par l'analyse des orbites des satellites artificiels. La relation (1.46) montre qu'il faut abaisser l'altitude du satellite pour faire jouer davantage les harmoniques de haut degré.

On considérera tous les coefficients non nuls a priori, ce qui fait qu'il y en aura donc  $N(N+3)$  à déterminer pour un modèle  $N \times N$ . Il s'agira bien entendu également de soustraire auparavant les autres perturbations (3<sup>ème</sup> corps, radiation solaire, etc.). On aboutit alors à des équations normales du genre  $\vec{d} = A\vec{p} + \sigma$ , avec  $\vec{d} = (\dot{e}, \dot{I}, \dot{\Omega}, \dot{\omega})$  et  $\vec{p}$  le vecteur des coefficients  $C_{nm}$  et  $S_{nm}$ ,  $A$  est la matrice de sensibilité ( $\partial d_i / \partial p_j$ ) [Kaula, 1966], et  $\sigma$  le vecteur d'erreurs. Les degrés pairs sont sensibles surtout à  $\dot{I}$  et  $\dot{\Omega}$ , et les impairs surtout à  $\dot{e}$  et  $\dot{\omega}$ ; il conviendra dès lors de procéder à une pondération correcte.

La convergence de la série des harmoniques sphériques est une question importante et a été étudiée à plusieurs reprises (voir p.ex. [Kholshevnikov, 1977]); elle est limitée par l'existence d'anomalies de densité (harmoniques élevés) à la proximité de la surface du corps considéré. C'est ce qui amène tout naturellement à des modèles de *densité de surface* ou à *points massifs* [Wong et al., 1971, Sjogren et al., 1971], mais si ces méthodes peuvent éventuellement convenir dans un cadre numérique, ce n'est certainement pas le cas dans le cadre du développement d'une théorie analytique du mouvement d'un satellite : nous utiliserons donc ici les harmoniques sphériques les plus dominants.

## 1.4 Harmoniques sphériques lunaires

Notre connaissance de la Lune augmente principalement par quanta, chaque satellite lunaire lancé ayant apporté sa propre moisson d'informations variables. Nous reprenons à la Table 1.3 les principaux satellites lunaires et leur orbite caractéristique.

Date du lancement	Nom du satellite	Pays	Orbite			
			$h_p \times h_a$ [km $\times$ km]	$a$ [km]	$e$ [1]	$i$ [°]
02/01/59	Luna 1*	USSR	Orbite solaire - passage près de la Lune			
10/08/66	LO-I	US	$52 \times 1860$	2694	0.34	12.2
06/11/66	LO-II	US	$52 \times 1860$	2694	0.34	11.9
05/02/67	LO-III	US	$55 \times 1847$	2694	0.33	20.9
04/05/67	LO-IV	US	$2706 \times 6111$	6152	0.28	85.5
01/08/67	LO-V	US	$194 \times 6023$	4849	0.60	85
04/08/71	Ap 15 SS	US	$104 \times 139$	1860	0.00935	151.28
24/04/72	Ap 16 SS	US	$90 \times 130$	1848	0.0108	169.281
24/01/90	Hiten*	Japon	$9594 \times 49394$	31232	0.6372	34.7
25/01/94	CLEM	US	$424 \times 2856$	3378	0.36	90
07/01/98	LP	US	$99 \times 101$	1838	0.00046	90.55
			$29 \times 52$	1779	0.00645	90
			$17 \times 43$	1768	0.00735	90
			$4962 \times 51477$	29958	0.776	81.08
27/09/03	SMART-1*	ESA	$300 \times 3000$			90

TAB. 1.3 – Les principaux satellites lunaires. Quasi tous ont servi à déduire des modèles gravifiques (excepté ceux repérés par \*, et sous réserve pour SMART-1). L'inclinaison  $i$  est définie ici par rapport à l'équateur lunaire.  $h_p$  et  $h_a$  sont respectivement les altitudes périséle et aposéle.

Il y a eu bien sûr beaucoup plus de missions, à la fois du côté russe (programme Luna 1–24 et Zond 1–8) et américain (programmes Ranger, Surveyor et Apollo). Le premier satellite lunaire a été russe : Luna 1, en 1966, soit à peine 10 ans après le premier satellite terrestre (Spoutnik, 1957). Luna 1 est passé à 5995 km de la Lune, avant de continuer sa route autour du Soleil. Il a permis de découvrir que la Lune n'avait plus de champ magnétique, et de montrer l'existence d'un fort vent solaire dans le milieu interplanétaire. Ensuite vient le programme LO (Lunar Orbiter) en 1966–67, qui a consisté en 5 satellites qui ont photographié 99% de la surface de la Lune (les 2 faces) avec une résolution de 1 m ; en particulier le but de LO-I était de photographier des zones planes de la surface lunaire pour la sélection d'endroits plus sûrs pour l'alunissage ultérieur.

Ce sont ensuite les américains qui ont mis les premiers le pied sur la Lune, dans la MARE TRANQUILITATIS (Mer de la Tranquillité), le 20 juillet 1969 (Apollo 11, Neil A. Armstrong et Edwin E. "Buzz" Aldrin Jr).

L'histoire du subsatellite Apollo 16 (1972) est également fameuse, car le satellite a été très rapidement perturbé par le champ de gravité lunaire, et s'est crashé très rapidement (après 35 jours).

Il y a ensuite eu un grand vide durant 20 ans, qui a été rompu par le satellite

Hiten (Muses-A), le premier satellite à utiliser un transfert à basse énergie<sup>7</sup> et aucune impulsion  $\Delta V$  pour la capture lunaire ; Hiten devait lancer le satellite Hagoromo en orbite lunaire, mais l'orbite de ce dernier n'a pas été confirmée. Suivirent ensuite surtout Clementine (CLEM), Lunar Prospector (LP), et enfin SMART-1.

C'est principalement à partir des données des satellites de la Table 1.3 que l'on a déduit les modèles gravifiques lunaires. La Table 1.4 reprend un aperçu assez complet des principaux modèles du champ de gravité existants. Au début le modèle était désigné par le nom de l'auteur, ensuite plutôt par un acronyme. Chaque mission a donné toute une génération de modèles ; pour une même mission, on peut dériver une multitude de modèles, suivant les types de données que l'on prend en compte. Le nombre d'observations se comptent en dizaines de milliers (LO & A), centaines de milliers (CLEM, LP), voire millions (LP).

Nous commentons ci-dessous brièvement les modèles les plus pertinents.

Nom du Modèle	Données satellites <sup>a</sup>	Degré $\times$ Ordre $n \times m$	Auteur ou Référence
L-1	Luna 10	$4 \times 4$	Akim 1966
	LO II	$8 \times 4$	[Lorell and Sjogren, 1968]
	LO V		[Muller and Sjogren, 1968]
	A15,16		[Wollenhaupt, 1970]
	LO I-V	$8 \times 8 + J_{9-15}$	[Liu and Laing, 1971]
	LO I-V +A8,12	600 masses	[Wong et al., 1971]
		$13 \times 13$	Michael and Blackshear 1972
	LO V +ASS	$16 \times 16$	Ferrari 1975
	LO V +ASS		[Ferrari, 1977]
			[Ferrari and Ananda, 1977]
Lun60d <sup>b</sup> Lun75f	LO IV +LLR	$5 \times 5$	[Ananda, 1977]
	LO I-V	$16 \times 16$	[Ferrari et al., 1980]
	+ASS +LLR		[Bills and Ferrari, 1980]
	Luna *	$4 \times 4 + J_{5-7}$	[Akim and Vlasova, 1983]
	LO I-V +ASS	$16 \times 16$	[Sagitov, 1985]
	+LLR +...		
	LO I-V +ASS	$60 \times 60$	[Konopliv et al., 1993]
GLGM-2	LO I-V +ASS +CLEM	$70 \times 70$	[Lemoine et al., 1997]
LP75*	LO I-V +ASS	$75 \times 75$	[Konopliv et al., 1998]
LP100*	+CLEM +LP	$100 \times 100$	[Konopliv et al., 2001]
LP165*		$165 \times 165$	[Konopliv et al., 2001]

<sup>a</sup>Abréviations : ASS = Apollo Subsatellites 15 & 16. LO = Lunar Orbiter. A = Apollo. Le symbole \* signifie qu'il y a toute une famille.

<sup>b</sup>Fort aliasing dans les hauts degrés (50).

TAB. 1.4 – Aperçu des principaux modèles de gravité lunaire disponibles.

Les premiers résultats historiques sont ceux de [Muller and Sjogren, 1968],

<sup>7</sup>"Weak Stability Boundary orbit" : orbites passant par des points de Lagrange. Ce type d'orbite est très différent des orbites classiques et permet de réduire drastiquement la quantité d'énergie mise en œuvre.

qui découvrent les *mascons* (Lunar Mass Concentrations). Nous reprenons à la Figure 1.10(a) page 26 la couverture de la revue Science, qui montre les contours de la première carte gravimétrique de la face visible de la Lune. Cette carte est déduite des accélérations locales du satellite LO-V, suivi depuis la Terre via le Deep Space Network. Muller et Sjogren sont les premiers à inventer la technique de différentiation des signaux Doppler : la mesure Doppler fournit la vitesse (avec une précision de l'ordre de 0.3 mm/s) du satellite (projetée<sup>8</sup> sur la ligne de visée), que l'on dérive ensuite pour obtenir l'accélération du satellite, et que l'on normalise pour une altitude nominale (100 km) via la relation  $a = \mathcal{G}M/r^2$ , où  $a$  représente ici l'accélération. C'est la définition commune de la *perturbation gravifique*  $\delta g$  qui sera adoptée ensuite par l'ensemble de la communauté lunaire.

A partir d'ici, les symboles  $M, R, \mu$  sont supposés correspondre à ceux de la Lune.

En analysant la Figure 1.10(a), on y distingue parfaitement les 2 plus gros mascons de la face visible : MARE IMBRIUM (18°W, 33°N) et MARE SERENITATIS (19°E, 27°N), d'une valeur de 230 mGal<sup>9</sup> et 180 mGal respectivement. En supposant que ces 2 mascons sont à une profondeur de 50 km sous la croûte, on peut en déduire une estimation de leur masse, soit environ  $20 \times 10^{-6}M$  chacune [Tapley and Schutz, 1975], ce qui correspond à une sphère de 100 km de diamètre en Nickel-Fer. Les mascons constituent de 0.01–0.03% de  $M$ . Au centre du disque lunaire se trouvent aussi 2 mascons proches : SINUS AESTRUM (8°W, 11°N) et SINUS MEDII (6°W, 6°N), qui ne sont pas vraiment résolus (mesures trop espacées).

Pour donner une idée de la disparité entre les modèles, et de l'évolution de la précision des coefficients, nous donnons à la Table 1.5 un bref aperçu historique des valeurs numériques des premiers harmoniques sphériques lunaires et des paramètres de libration<sup>10</sup> :

$$\beta = \frac{C - A}{B} \quad \gamma = \frac{B - A}{C} \quad . \quad (1.61)$$

Il convient toutefois de relativiser ce genre de comparaison, un modèle en harmoniques sphériques devant plutôt être considéré dans sa globalité que par des valeurs isolées.

Le second résultat important est celui de [Bills and Ferrari, 1980], qui présentent un modèle déjà plus complet (combinant plusieurs types de mesures), et de degré plus élevé ( $N = 16$ ). Nous présentons à la figure 1.9 une vue graphique de leurs coefficients d'harmoniques sphériques (les valeurs numériques ainsi que leur degré de précision sont repris à l'Annexe A, Figure A.1). Les coefficients ont été normalisés suivant (1.50) – (1.55), le potentiel perturbateur (sans la partie centrale) s'écrit dès lors :

$$U = \frac{\mu}{R} \sum_{n=2}^{16} \left( \frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\sin \phi) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1.62)$$

avec  $\mu = 4902.799 \pm 0.003 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$  et  $R = 1737.53 \pm 0.03 \text{ km}$  [Bills and Ferrari, 1977]. Les coefficients les plus importants sont  $J_2$  et  $C_{22}$  ; c'est eux qui seront considérés

<sup>8</sup>A cause de cette projection, la précision est mauvaise près du limbe lunaire.

<sup>9</sup>Le symbole Gal représente l'unité d'accélération Galileo (du nom de l'astronome italien Galileo Galilei 1564–1642), et convient bien pour caractériser les champs de gravité des planètes courantes. A ne pas confondre avec le gal (gallon métrique). 1 Gal = 1 cm/s<sup>2</sup> et 1 mGal = 10<sup>-5</sup> m/s<sup>2</sup>.

<sup>10</sup>Leur mesure (indirecte par LLR pour la Lune) permet, une fois qu'on a  $J_2$  et  $C_{22}$ , de déterminer les moments d'inertie  $A, B, C$ . En particulier, cela donne accès au moment d'inertie polaire normalisé  $C^*$ .

$C_{20}$	$C_{21}$	$C_{22}$	$S_{21}$	$S_{22}$	$C_{30}$	$C_{31}$	$C_{32}$	$C_{33}$	$S_{31}$	$S_{32}$	$S_{33}$	$\beta$	$\gamma$	Référence
-200.0	0	25.0	0	0										[Oesterwinter, 1970]
-207.1		-22.07			-22.1	-23.4	0	-2.26						Ferrari, 1973, CM 7, 46-76
-207.11	0	20.716	0	0	21.0	34.0	0	2.583	0	0	0			Ferrari, 1973, CM 8, 111-120
					-21.5	29.3	5.9	2.0	9.5	3.8	-0.3			Bryant et al. 1974
						26	4.7	2		1.8				King et al. 1976
					-10.4	(28.6)	4.8	(2.7)	(8.8)	1.7				Williams 1977
					-7.6	(28.6)	4.7	2.9	(8.8)	1.6	-1.3			Calanne 1977
					-12.1	30.7	4.9	1.4	5.6	1.7	-0.3			Ferrari et al. 1979
-202.43 $\pm 1.14$	-0.09 $\pm 0$	22.26 $\pm 0.13$	0 $\pm 0$	0.019 $\pm 0.007$	-8.89 $\pm 1.51$	23.7 $\pm 1.12$	4.83 $\pm 0.05$	2.21 $\pm 0.14$	7.16 $\pm 1.28$	1.63 $\pm 0.04$	-0.34 $\pm 0.13$			[Bills and Ferrari, 1980]
					-15	35	5	3	10	2	-2	630	230	[Moons, 1982]
-204.0 $\pm 1.0$		22.50 $\pm 0.11$			-8.66 $\pm 0.16$	32.4 $\pm 2.4$	4.869 $\pm 0.025$	1.73 $\pm 0.050$	4.67 $\pm 0.73$	1.696 $\pm 0.009$	-0.28 $\pm 0.020$			Dickey et al., 1994, Science
-203.986 $\pm 0.131$		22.227 $\pm 0.023$			-9.99 $\pm 0.24$	28.290 $\pm 0.098$	4.886 $\pm 0.030$	1.756 $\pm 0.007$	5.54 $\pm 0.07$	1.656 $\pm 0.029$	-0.270 $\pm 0.006$			[Lemoine et al., 1997] (G1GM-2)
-203.428 $\pm 0.09$		22.395 $\pm 0.015$										631.486 $\pm 0.09$	227.871 $\pm 0.03$	[Konopliv et al., 1998] (LP75)
-203.24 $\pm 0.012$	-0.0035 $\pm 0.0058$	22.357 $\pm 0.0024$	-0.00098 $\pm 0.0045$	0.0108 $\pm 0.0020$	-8.476 $\pm 0.017$	28.437 $\pm 0.0081$	4.846 $\pm 0.002$	1.7132 $\pm 0.0006$	5.9022 $\pm 0.0048$	1.6709 $\pm 0.0021$	-0.249 $\pm 0.0006$			Konopliv, 1998, <i>www</i> (LP165)

TAB. 1.5 – Bref aperçu historique des valeurs numériques des premiers harmoniques sphériques lunaires (non normalisés) et de leur précision. Il faut appliquer un facteur  $\times 10^{-6}$  à l'ensemble du tableau.

comme petits paramètres pour développer la théorie analytique (voir Chapitre 7).

L'ordre de grandeur de ces deux coefficients (non normalisés) et donné à la Table 1.6, où l'on compare les valeurs pour la Lune [Bills and Ferrari, 1980, p. 1018] et pour la Terre [Kaula, 1966, p. 115] : la Lune est beaucoup moins aplatie que la Terre, ce qui fait que le coefficient  $C_{22}$  est davantage proche du  $J_2$  (à une distance d'un ordre de grandeur au lieu de trois dans le cas de la Terre) ; notre but est d'introduire l'effet de  $C_{22}$  en plus de celui de  $J_2$ .

	$C_{20} \equiv -J_2$	$C_{22}$
Terre $\oplus$	$-10^{-3}$	$2.10^{-6}$
Lune $\text{\textcircled{L}}$	$-2.10^{-4}$	$2.10^{-5}$

TAB. 1.6 – Ordres de grandeur des coefficients  $J_2$  et  $C_{22}$  (non normalisés).

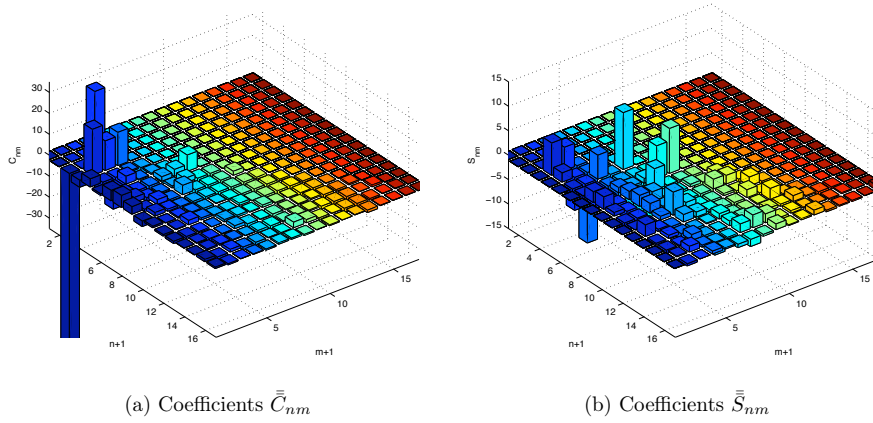


FIG. 1.9 – Coefficients normalisés du modèle en harmoniques sphériques de degré  $N = 16$ . Un facteur  $10^{-6}$  doit être appliqué à la valeur affichée.

Bills et Ferrari utilisent la définition de la perturbation gravifique  $\delta g$ , qui est l'accélération ressentie en  $r = R + 100 \text{ km} = 1838 \text{ km}$  (suivant ainsi la pratique courante dans la littérature lunaire, ce qui permet entre autres de pouvoir comparer avec [Muller and Sjogren, 1968]) :

$$\delta g = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\mu}{R^2} \sum_{n=2}^{16} (n+1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\sin \phi) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1.63)$$

mais également l'anomalie gravifique  $\Delta g$  au niveau du planétoïde (suivant cette fois la pratique terrestre) :

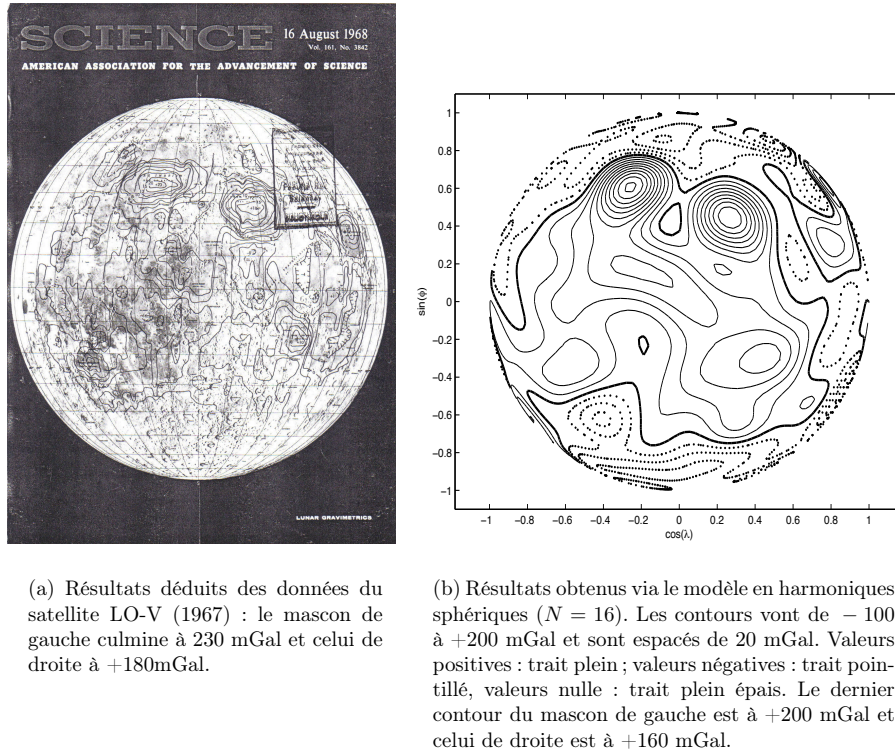
$$\Delta g = -\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{2U}{r} = \frac{\mu}{R^2} \sum_{n=2}^{16} (n-1) \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sum_{m=0}^n \bar{P}_{nm}(\sin \phi) [\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)] \quad (1.64)$$

à évaluer en  $r = R = 1738 \text{ km}$ . On peut également trouver ces définitions dans [Heiskanen and Moritz, 1967].



Afin d'avoir une idée de la précision du modèle en harmoniques sphériques, et de l'ensemble de la répartition des mascons, nous avons recalculé l'anomalie gravifique  $\delta g$  et tracé ses contours. La Figure 1.10(b) représente les contours de  $\delta g$  sur la face visible, comme présenté précédemment pour le (a) ; la correspondance est frappante : on y retrouve bien entendu les mêmes grandes caractéristiques qu'à la Figure 1.10(a), mais avec davantage de précision. Une représentation plus parlante (3D couleur) est proposée à la Figure 1.14(a), avec une échelle en  $\delta g$ .

La Figure 1.12 (a) page 30 montre les contours de  $\delta g$  sur l'ensemble de la surface lunaire cette fois ; la face cachée n'est pas très fiable car non résolue (par manque de données). On y distingue bien les grosses caractéristiques, mais la résolution est encore relativement pauvre.



**FIG. 1.10** – Contours de la perturbation gravifique  $\delta g(\lambda, \phi, r = 1838 \text{ km})[\text{mGal}]$  ( $1 \text{ mGal} = 10^{-5} \text{ m/s}^2$ ) sur la face visible. On y distingue très bien les 2 plus gros mascons de la face visible.

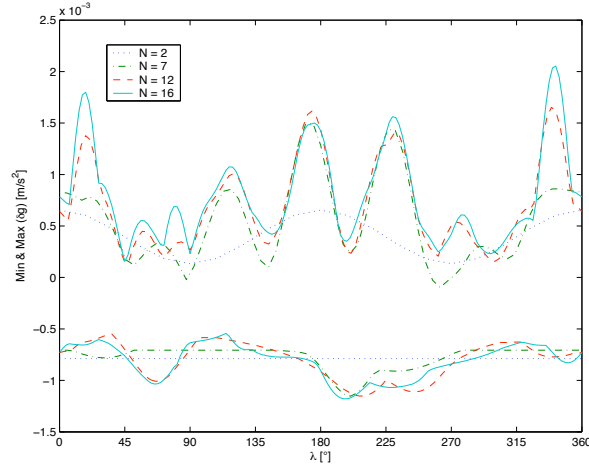
La résolution spatiale que l'on peut attendre d'un modèle en harmoniques sphériques dépend bien sûr du degré  $N$  du modèle — outre la qualité des mesures — par une relation simple du genre :

$$\Delta s = R\pi/N \quad \text{avec} \quad R = 1738 \text{ km} \quad (1.65)$$

où  $\Delta s$  est la résolution spatiale à la surface de la Lune. Pour le degré  $N = 180$  par exemple, la résolution angulaire est de  $1^\circ$ , soit un arc de 30 km en surface. Pour les 2 mascons SINUS AESTRUM et SINUS MEDII non résolus avec  $N = 16$ , on peut

calculer que s'ils sont proches d'environ  $10^\circ$  (300 km) ils nécessitent alors un modèle de degré  $N = 18$  pour être résolus ; c'est en effet le cas (voir Figure 1.12 page 30).

Nous illustrons de façon plus parlante l'effet du degré  $N$  du modèle sur la résolution spatiale de la carte de  $\delta g$  [ $\text{m/s}^2$ ] à la Figure 1.15 page 31, où l'on a pris en compte successivement  $N = 2, 7, 12, 16$ . On y reconnaît bien la signature caractéristique du  $J_2$  et du  $C_{22}$  à la Figure 1.15 (a) ; ensuite les détails apparaissent. L'évolution de l'échelle indique également que les valeurs extrémales atteintes sont de plus en plus extrémales au fur et à mesure que l'on augmente la résolution. Pour donner une idée de l'ampleur de cet effet, nous avons reporté à la Figure 1.11 les valeurs extrêmes de  $\delta g$  [ $\text{m/s}^2$ ] calculées le long de chaque méridien pour les différentes valeurs du degré  $N$  du modèle. On voit clairement que les maxima augmentent avec la résolution, on a par exemple pour les 2 plus gros mascons une évolution telle que reprise à la Table 1.7.



**FIG. 1.11** – Effet du degré  $N$  du modèle sur les valeurs extrêmes de la perturbation gravifique  $\delta g$  [ $\text{m/s}^2$ ]. Les valeurs minima et maxima sont calculées le long de chaque méridien.

MARE	$N = 16$ (Bills)	$N = 70$ (GLGM-2)	$N = 110$ (LP)
IMBRIUM ( $18^\circ\text{W}$ , $33^\circ\text{N}$ )	230	311	353
SERENITATIS ( $19^\circ\text{E}$ , $27^\circ\text{N}$ )	180	356	366

**TAB. 1.7** – Effet du degré  $N$  du modèle sur la perturbation gravifique maximale  $\delta g$  [ $\text{mGal}$ ] pour les 2 plus gros mascons de la face visible.

Il est important de disposer de modèles de gravité lunaire aussi précis que possible, pour améliorer à la fois le calcul d'orbites et les modèles géophysiques de densité interne de la Lune. En étudiant les arcs longs, on améliore les orbites, tandis que les arcs courts améliorent la géophysique. La prise en compte d'orbites hautes (LO-IV ou CLEM) ou de mesures LLR améliore la qualité des harmoniques sphériques de bas degré. Bills & Ferrari ont été les premiers à combiner ces données

de nature différente via une technique des moindres carrés pondérés. Ils ont ainsi obtenu un spectre plus lisse, en imposant a priori des contraintes (semi-) empiriques sur les coefficients (modèle de variance<sup>11</sup>, sur base d'hypothèses d'homogénéité et d'isotropie des variations gravifiques lunaires), afin de limiter les conséquences indésirables (coefficients corrélés) d'une forte dispersion géographique des données. On utilise beaucoup la Loi (empirique) de Kaula ( $\sigma_n^2 \propto n^{-3}$ ), qui convient fort bien pour la Terre. Mais il peut y avoir des discussions sur la validité de cette loi (Bills & Ferrari trouvaient  $\sigma_n^2 \propto n^{-4}$  pour la Lune, la Terre & Mars [Bills, 1979]), qui semble être une caractéristique commune de toutes les planètes solides et satellites (état de compensation isostatique<sup>12</sup>). Des données Doppler et LLR qui ont des sensibilités complémentaires permettent ensemble de déterminer précisément les inerties lunaires [Ananda, 1977].

Bills & Ferrari donnent également des cartes de l'anomalie Bouguer<sup>13</sup>, une quantité qui est beaucoup utilisée et qui donne une idée de la corrélation entre la gravité et la topographie (la topographie était donnée initialement par les altimètres LASER Apollo). L'idée première selon laquelle les vallées seraient moins attractives que des montagnes est valable dans une certaine mesure, mais est également à relativiser. Pour la Lune, cette corrélation gravité-topographie est globalement pauvre. On voit en effet clairement en comparant les Figures 1.12 et 1.13 que les 2 gros mascons attractifs de la face visible sont localisés justement dans les mers lunaires (bassins de basse altitude), ce qui appuie fortement les thèses d'impact d'astéroïdes. Des scénarii de formation sont discutés par exemple dans [Konopliv et al., 1998]. En outre, le modèle de compensation isostatique d'Airy permet de déduire une carte de l'épaisseur de la croûte.

Le troisième résultat important est celui de [Lemoine et al., 1997], qui ont analysé les données de Clementine, et déduit GLGM-2, un modèle de gravité en harmoniques sphériques  $70 \times 70$ . Clementine ( $e \approx 0.36$ ) a donné davantage de précision pour les harmoniques de bas degré  $n = 2, 3$  (grâce à un périastre élevé) ainsi que pour les termes sectoriaux jusqu'au degré 20 (grâce à une orbite polaire). L'orbite polaire était une grande première (les missions Apollo avaient surtout couvert la zone équatoriale, ce qui ne représentait que 20% de la surface lunaire).

De plus, la sonde Clementine a scanné pour la première fois une grande partie (de  $60^\circ\text{S}$  à  $60^\circ\text{N}$ ) de la surface lunaire au LASER (instrument altimétrique LIDAR), ce qui a permis de déduire un modèle topographique en harmoniques sphériques  $72 \times 72$  ( $R = 1738$  km) [Smith et al., 1997], qui est le modèle topographique lunaire le plus précis à l'heure actuelle ; il est disponible sur <http://wwwpds.wustl.edu/> et donne l'altitude (en [m]) par rapport au sphéroïde ( $R = 1738$  km) aplati ( $f = 1/3234.93$ ). La résolution spatiale pour  $N = 72$  est de  $2.5^\circ$  ; la précision nominale sur l'altitude  $h$  est de 100 m, mais elle est très dégradée près des pôles, par manque de données. De ce modèle, on a également produit des cartes topographiques en 2 "résolutions" :  $1^\circ \times 1^\circ$  et  $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ . La Figure 1.13 donne les contours de la topographie lunaire en résolution  $1^\circ \times 1^\circ$ , tandis que nous proposons une représentation plus parlante (3D couleur) de la topographie à la Figure 1.14(b), en résolution  $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ , où l'on

<sup>11</sup>La variance du degré  $n$  est définie par  $\sigma_n^2 = \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2)$ . Cette quantité peut être interprétée comme une PSD (Power Spectral Density).

<sup>12</sup>La distribution de densité interne est telle qu'elle compense partiellement l'effet gravitationnel de la topographie de la surface.

<sup>13</sup>L'anomalie Bouguer est la différence entre la gravité observée (donnée par un modèle de gravité) et la gravité théorique déduite de la topographie.

voit que la topographie va globalement de  $-8$  km à  $+8$  km (la plus haute résolution donne des pics un peu plus élevés :  $8.2$  km au lieu de  $7.4$  km). La combinaison des données de topographie avec les données de gravité a permis de nouvelles analyses géophysiques de la Lune (voir [Zuber et al., 1994] pour plus de détails).

Le dernier résultat important est celui de [Konopliv et al., 2001], qui ont analysé les données de Lunar Prospector (LP). LP a été le premier satellite polaire en orbite très basse ( $h = 100 \pm 20$  km, et même plus bas), ce qui a donné une couverture complète à haute résolution de la face visible de la lune, et a permis de passer à des modèles de degré nettement supérieur ( $N = 165$ ), plus précis que les précédents. La précision des mesures est de  $20$  mGal sur la face visible et  $> 100$  mGal sur la face cachée. Les modèles LP sont donc les meilleurs actuellement, car ils cumulent avantageusement les gammes de précision des différents satellites précédents (mélange de données dans un rapport d'environ :  $10\%$  LO +  $3\%$  CLEM +  $87\%$  LP). Pour la seule mission LP, il y a eu plusieurs modèles de gravité; ils sont disponibles sur <http://wwwpds.wustl.edu/>. Pour fixer les idées et donner un aperçu des premiers coefficients, nous donnons à l'Annexe A, Figure A.2, un extrait du fichier `jgl165p1.sha` qui contient les  $N(N+3)$  coefficients du modèle. Pour  $N = 165$ , il y a déjà  $27720$  coefficients (contre  $304$  pour  $N = 16$ ) !

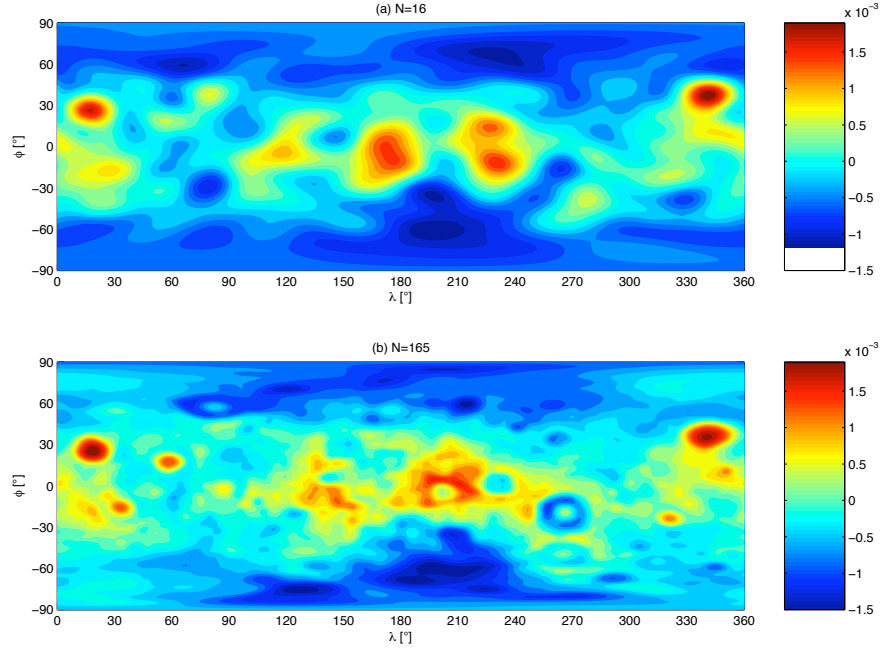
Nous comparons les contours de  $\delta g$  du modèle de Bills et du modèle de Konopliv à la Figure 1.12 (avec la même échelle) ; on voit nettement que le modèle  $N = 165$  (Figure 1.12 (b)) recèle bien plus de détails que le modèle  $N = 16$  (Figure 1.12 (a)). De nouveaux mascons sont d'ailleurs découverts :  $3$  gros sur la face visible et même indirectement  $4$  sur la face cachée [Konopliv et al., 1998]. Certaines structures très particulières se détachent aussi clairement, comme les bords de mascons : par exemple la forme en fer à cheval du mascon de la MARE ORIENTALE ( $95^\circ\text{W}$ ,  $20^\circ\text{S}$ ), sur le bord du limbe lunaire gauche ( $\lambda = 270^\circ$ ), d'où il est ensuite possible de tirer un certain nombre de conclusions quant au scénario de formation.

Un des succès de LP est incontestablement la détermination du moment d'inertie polaire normalisé  $C^*$  :

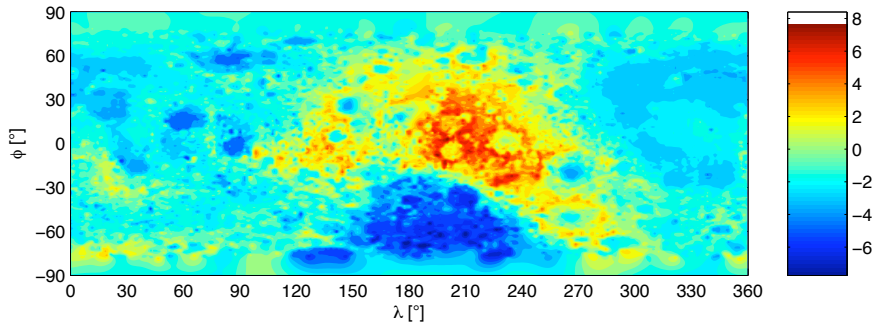
$$C^* = C/MR^2 \quad (1.66)$$

avec une précision nettement meilleure (c'est un corollaire de l'amélioration des harmoniques sphériques) :  $C^* = 0.3932 \pm 0.0002$  (la mesure LLR donnait  $C^* = 0.394 \pm 0.002$ ). Ce paramètre permet de mieux sélectionner le meilleur modèle intérieur de la Lune. Pour une sphère homogène, on a  $C^* = 0.4$ . Si la densité augmente avec la profondeur, alors  $C^* < 0.4$ . Pour la Terre, on a  $C^* = 0.33$ , ce qui signifie qu'il y a un (gros) noyau plus lourd. Selon la valeur obtenue par LP la Lune aurait un noyau de masse  $1-4\%$  de  $M$ . S'il est en Fer, cela donne un noyau de taille variant de  $300$  à  $450$  km de rayon [Binder, 1998] ( $220-450$  km dans [Konopliv et al., 1998]). Notons qu'une masse dépassant  $1\%$  implique que le matériau lunaire n'est pas composé entièrement de matériau provenant du manteau terrestre, et évacue donc une certaine hypothèse de formation tardive. Par contre, les hypothèses de formation qui considèrent que l'impact a eu lieu avant l'accrétion complète de la Terre permettent, eux, de considérer un noyau de Fer de masse  $> 1\%$ . Le nombre de Love lunaire<sup>14</sup> est également déterminé avec plus de précision :  $k_2 = 0.026 \pm 0.003$  [Konopliv et al., 2001], tandis qu'on avait précédemment  $k_2 = 0.022 \pm 0.013$  [Ferrari et al., 1980]. De la valeur de  $k_2$  on déduit une grande dis-

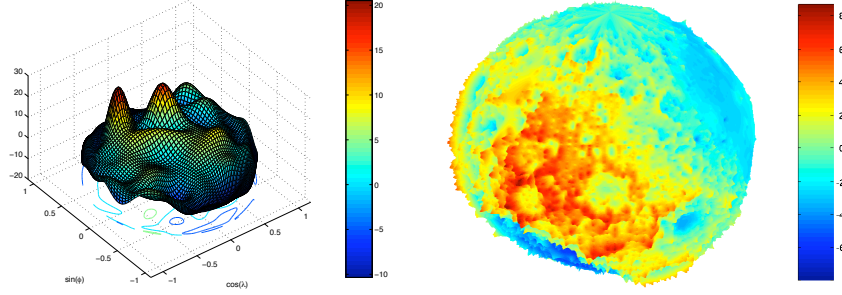
<sup>14</sup>Le nombre de Love lunaire  $k_2$  est un paramètre d'élasticité et constitue le coefficient principal dans le potentiel des effets de marées solides.



**FIG. 1.12** – Effet du degré  $N$  du modèle en harmoniques sphériques sur les contours de la perturbation gravifique  $\delta g(\lambda, \phi, r = 1838 \text{ km})$  [ $\text{m/s}^2$ ] ( $10^{-3} \text{ m/s}^2 = 100 \text{ mGal}$ ) : (a)  $N = 16$  – (b)  $N = 165$ . La face visible est centrée sur le méridien  $\lambda = 0^\circ$ .



**FIG. 1.13** – Contours de la topographie lunaire [km] (par rapport au sphéroïde  $R = 1738 \text{ km}$  aplati  $f = 1/3234.93$ ) — données de Clementine (résolution  $1^\circ \times 1^\circ$ ). La face visible est centrée sur le méridien  $\lambda = 0^\circ$ .



(a)  $\delta g(\lambda, \phi, r = R)$ . La valeur affichée doit être multipliée par 10 pour obtenir des [mGal].

(b)  $h$  [km.]  $R$  a été artificiellement fixé à 60 km afin de faire ressortir davantage la topographie. La résolution est de  $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ . La face cachée est à gauche, et la face visible à droite.

FIG. 1.14 – Vues 3D : (a) Perturbation gravifique – (b) Topographie.

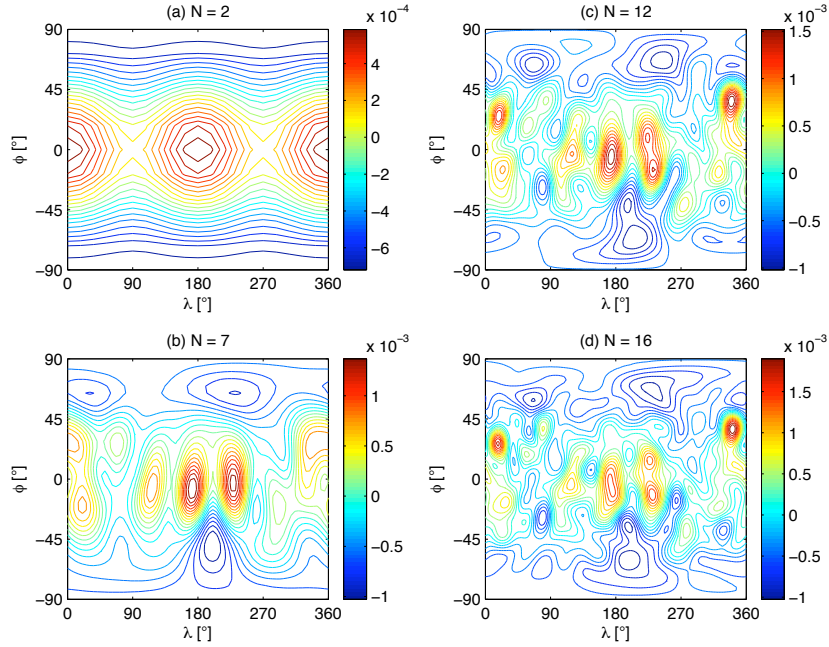


FIG. 1.15 – Effet du degré  $N$  du modèle sur la résolution spatiale de la carte de perturbation gravifique  $\delta g$  [m/s<sup>2</sup>]. Il y a toujours 20 contours sur l'ensemble de chaque échelle.

sipation d'énergie de rotation (effet de marées ou interaction entre un manteau et un noyau liquide). En outre, l'application de la Loi (empirique) de Kaula ( $\sigma_n^2 = Kn^{-3}$ ), où  $K$  est un paramètre qui est ajusté en fonction des contraintes internes de la planète, permettrait de conclure que la Lune renfermerait moins de contraintes que la Terre [Konopliv et al., 1998].

La grande conclusion du survol des différents modèles de gravité lunaire est que **tous les modèles souffrent malheureusement d'un manque de données sur la face cachée**<sup>15</sup> de la lune, puisque le suivi de l'orbite des satellites se fait toujours depuis une station terrestre. Les conséquences sont désastreuses : effet d'aliasing pour les coefficients de haut degré (coefficients fortement corrélés) [Konopliv et al., 2001], ce qui peut heureusement se limiter dans une certaine mesure en contraignant les modèles via une loi de type Kaula. Plusieurs nations ont toutefois lancé chacune leur projet pour mesurer la gravité sur la face cachée de la lune (via SST<sup>16</sup>), mais aucun n'a encore vraiment vu le jour actuellement. Toute la communauté lunaire attend avec grande impatience ce nouveau type de mesures.

L'année 2005 a été très excitante car l'exploration lunaire bat à nouveau son plein [Foing and ILE WG, 2004] ; nous reprenons une brève liste des projets actuels à la Table 1.8. Le satellite SMART-1 [Foing et al., 2003] vole toujours autour de la Lune au moment de la rédaction de ce document. Le Japon est fort actif, avec la mission Lunar-A qui permettrait de contraindre davantage la taille du noyau lunaire [Mizutani et al., 2003], et la mission SELENE qui inclut des mesures VLBI [Namiki et al., 1999, Sasaki et al., 2003] dix fois plus précises que les mesures Doppler. Le futur est également aux missions robotisées (avant les missions humaines) : la NASA et son "Robotic Lunar Exploration Program" (RLEP) est composée de LRO et du Lunar Lander. Pour être complet, il faut également mentionner la proposition d'ajouter un subsatellite LUSS [Milani et al., 1996] au projet MORO de l'ESA [Floberghagen et al., 1996], malheureusement avorté. Il y a également eu un projet Luna-Glob (Russie-Chine) mais il semble au point mort.

Satellite lunaire	Pays	Date	Nature / Objectifs principaux
SMART-1	ESA	27/09/03	technologie (propulsion ionique)
Lunar-A	Japon	2006	2 pénétrateurs + 2 sismomètres
SELENE <sup>a</sup>	Japon	01/01/07	gravité de la face cachée par SST
Chandrayaan-1	Inde	01/09/07	technologie, topographie, pénétrateurs
Chang'e-1	Chine	fin 2007	images 3D, spectromètre, épaisseur croûte
LRO <sup>b</sup>	US	1/10/08	robot, images, radiation, glace ?
Lunar Lander <sup>c</sup>	US	1/1/2010	échantillons (2 kg) du pôle Sud ; eau ?

<sup>a</sup>SELENE = SELEnological and ENgineering Explorer.

<sup>b</sup>LRO = Lunar Reconnaissance Orbiter.

<sup>c</sup>Moonrise : Lunar South Pole-Aitken Basin Sample Return Mission (NASA New Frontiers).

TAB. 1.8 – Exploration lunaire internationale (ILE) : les différents projets du début du XXI<sup>e</sup> siècle.

<sup>15</sup>Le trou s'étend en fait à environ 33% de la surface lunaire, car on peut tout de même suivre le satellite jusqu'à 20° derrière le limbe lunaire.

<sup>16</sup>Satellite-Satellite Tracking : le satellite qui se trouve du côté de la face cachée de la Lune est suivi par un autre satellite qui, lui, est suivi depuis la Terre.

## 1.5 Conclusion

Nous avons avant tout effectué quelques rappels sur le problème des 2 corps : le satellite peut en effet en toute première approximation être considéré comme tournant de façon keplerienne autour de la Lune.

Afin de pouvoir élaborer une théorie d'un satellite lunaire plus complète, nous avons considéré les écarts par rapport à cette situation idéale. Pour ce faire, nous avons pris amplement connaissance avec la Lune, et constaté que le  $J_2$  et le  $C_{22}$  jouaient un rôle prépondérant dans son champ de gravité ; c'est donc eux que nous considérerons en priorité. Par ailleurs, il s'agit également de prendre en compte la rotation de la Lune de période  $T_{\mathcal{L}}$ .

Nous résumons ce cheminement à la définition de trois paramètres de perturbation du cas keplerien :

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{L}} &= 2\pi/T_{\mathcal{L}} \\ \epsilon &= +J_2 R^2 \\ \delta &= -C_{22} R^2 \end{aligned} \tag{1.67}$$

Ces trois paramètres seront utilisés dans le cadre de la théorie des perturbations (triangle de Lie) — voir Chapitre 3.

Sans oublier que la Lune est notre propre satellite : il y a donc un troisième corps (la Terre) à prendre en compte en ce qui concerne les perturbations : c'est l'objet du Chapitre suivant, où nous définirons le quatrième paramètre de perturbation ( $\gamma$ ).





## Chapitre 2

# Le satellite artificiel lunaire : perturbations principales

On peut se demander quelles perturbations il faut au juste prendre en compte. Notre souci étant de décrire la dynamique globale (analyse de mission), nous souhaitons ne considérer que les effets les plus importants.

### 2.1 Classement par ordre de grandeur des perturbations

Un classement peut être trouvé dans la littérature [Liu and Wang, 1998] et suffit amplement pour nos besoins ; il est repris à la Table 2.1 . Notons que l’auteur a considéré une valeur de  $J_{2\odot} = 10^{-5}$  et évalué la pression de radiation pour un satellite ayant une masse de 500 kg et un diamètre de 2 m.

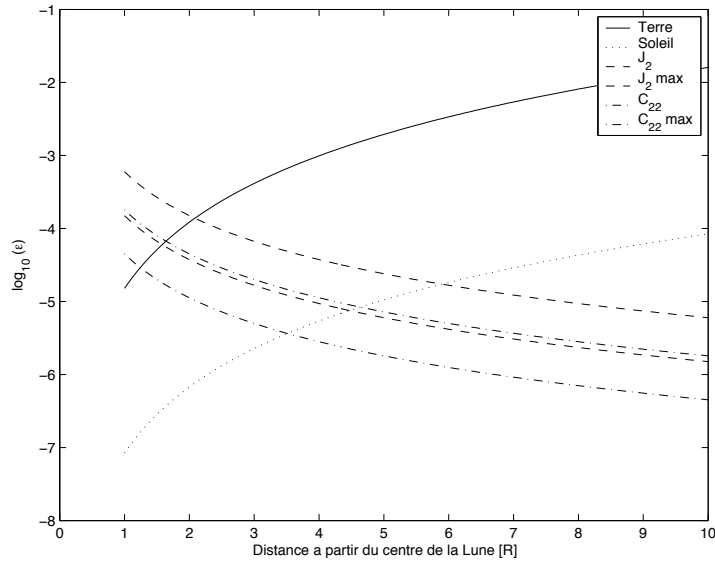
TAB. 2.1: Classement par ordre de grandeur des différentes perturbations sur un satellite lunaire.

$j$	Type de Force $F_j$	$O(\epsilon_j) = \frac{ F_j }{ F_0 }$
0	Centrale .....	$10^0$
1	Asphéricité ( $J_2$ & $C_{22}$ ) .....	$10^{-4} - 10^{-5}$
2	Terre $\oplus$ .....	$10^{-5}$
3	Soleil $\odot$ .....	$10^{-7}$
4	Marées solides lunaires .....	$10^{-7}$
5	Librations lunaires physiques ..	$10^{-8}$
6	Pression de radiation .....	$10^{-9}$
7	Effets relativistes .....	$10^{-11}$
8	Effet indirect dû à $J_{2\oplus}$ et à $J_{2\oplus}$ .....	$10^{-11}$
9	Planètes (Vénus $\varphi$ & Jupiter $\eta$ ) .....	$10^{-12}$
10	Aplatissement Terre $J_{2\oplus}$ .....	$10^{-12}$
11	Aplatissement Soleil $J_{2\odot}$ .....	$10^{-19}$

Comme nous sommes intéressés par les effets les plus influents, une limite s’impose tout naturellement :  $10^{-6}$ , ce qui revient à considérer les perturbations énumérées au §1.5. On pourrait, dans une phase ultérieure, en considérer davantage, mais

cela n'apporterait pas beaucoup plus d'informations quant à la dynamique globale ; par contre cela augmenterait nettement la taille des calculs à conduire.

On remarque aussi que la perturbation terrestre est tellement importante qu'elle vient flirter avec les paramètres d'asphéricité  $J_2$  et  $C_{22}$ . Le tableau H.1 est une vue assez résumée de la situation d'un satellite lunaire, mais il présente l'avantage de fixer rapidement les idées. L'ordre de grandeur des effets dépend en effet évidemment de la position respective des N-corps ; le classement sera en tous cas — on s'en doute — fortement dépendant de l'altitude du satellite lunaire, la Terre perturbant d'autant plus que l'on s'éloigne de la Lune. Afin d'avoir une idée plus précise de l'influence respective des perturbations principales, et d'éventuellement les classer plus précisément, nous avons calculé l'effet de ces trois perturbations en fonction de l'altitude ; nous y avons même ajouté une quatrième : la première perturbation négligée, celle due au Soleil, afin de s'assurer qu'elle était effectivement bien négligeable. Pour ne pas alourdir inutilement le texte, nous passons les calculs et montrons directement les résultats sous forme de graphique — par ailleurs plus parlant — à la Figure 2.1.



**FIG. 2.1** – Effet des perturbations dues à  $J_2$ ,  $C_{22}$ , à la Terre et au Soleil, en fonction de l'altitude du satellite lunaire (exprimée en rayons lunaires  $R$ ).

On voit d'emblée que la première perturbation négligée est effectivement deux ordres de grandeur en dessous. Pour chaque harmonique sphérique, il y a deux courbes ; ce sont les valeurs extrémales possibles pour l'harmonique considéré (l'effet dépendant en effet de la latitude  $\phi$  et de la longitude  $\lambda$  du satellite).

On constate également qu'il y a une concurrence entre les effets de la Lune (via les harmoniques sphériques) et ceux de la Terre ; ces derniers commençant visiblement à être importants vers  $1.75 R$ , valeur qui est en concordance avec les résultats de l'analyse que nous ferons au §9.3. Pour une altitude de satellite lunaire inférieure à  $2R$ , les ordres de grandeur des perturbations dues à  $J_2$ ,  $C_{22}$  et la Terre sont relativement du même ordre de grandeur.

## 2.2 Sphère d'influence

On peut se poser d'emblée la question de savoir à partir de quelle distance de la Lune le satellite lunaire sera davantage perturbé par la Terre que par la Lune. Cette question rejoint le concept général à la fois de la sphère d'influence et du problème des 3 corps. La définition de la sphère d'influence<sup>1</sup> repose sur une certaine propriété d'équilibre gravitationnel. Cette définition laisse la porte ouverte à différentes méthodes afin de calculer la taille ainsi que la forme de la sphère d'influence. On remarque toutefois directement que cette surface doit être axisymétrique par rapport à l'axe Terre-Lune.

Il est important de préciser ces aspects de sphère d'influence, afin d'avoir en tête la limite de validité de notre théorie. En effet, hors de la sphère d'influence lunaire, il vaudra mieux considérer le satellite comme un satellite de la Terre. C'est la situation qu'a connu le satellite SMART-1 le 11 novembre 2004, lorsqu'il se trouvait à sa 331<sup>e</sup> apogée, soit à 53 215 km.

Comme nous l'avons vu, le satellite situé à  $a = 2R$  peut déjà être fortement perturbé par la Terre, alors qu'il se trouve quasiment au centre de la sphère d'influence lunaire : il convient de bien distinguer ces deux notions.

### 2.2.1 Taille de la sphère d'influence

La méthode de PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1749–1827) est d'égaliser les rapports entre accélérations perturbatrice et centrale dans chacune des zones. Par accélération perturbatrice, on entend la différence entre les accélérations des deuxième et troisième corps sous l'effet du premier.

Une autre méthode fait appel à l'équilibre de trois corps de la théorie de LOUIS LAGRANGE (1736–1813). Les équilibres de Lagrange sont tels que les 3 corps conservent leurs positions relatives, tout en ayant un mouvement global de rotation. Il existe des solutions en triangle et des solutions en ligne ; elles sont définies dans de nombreux ouvrages comme par exemple [Stevens, 1998, Meirovitch, 1970]. Nous les avons recalculées<sup>2</sup>. Le point  $L_1$  de Lagrange définit alors la séparation entre les zones d'influence lunaire et terrestre. Sa position est donnée par l'équation :

$$(m_1 + m_2)\rho^5 + (3m_1 + 2m_2)\rho^4 + (3m_1 + m_2)\rho^3 - (m_2 + 3m_3)\rho^2 - (2m_2 + 3m_3)\rho - (m_2 + m_3) = 0 \quad (2.1)$$

où  $m_i$  sont les masses et  $x_i$  les positions le long de l'axe des 3 masses alignées, où  $x_1 < x_2 < x_3$ ,  $x_2 - x_1 = 1$ ,  $x_3 - x_2 = \rho > 0$ . Il se fait que l'équation du cinquième degré (2.1) n'a qu'une racine positive ; la position de  $L_1$  entre les deux masses est donc fixée univoquement.

On peut aussi trouver les cinq équilibres  $L_{1-5}$  de Lagrange [Capderou, 2002] en considérant les courbes de vitesse relative nulle du problème des 3 corps restreint circulaire [Pollard, 1966]. Nous en montrons une illustration à la Figure 2.2(a), qui correspond au cas Terre-Lune, où le rapport des masses est assez élevé<sup>3</sup> (environ

<sup>1</sup>C'est ce que Laplace nommait la *sphère d'activité* de la planète [Tisserand, 1896].

<sup>2</sup>Ce qui a d'ailleurs permis de retrouver une erreur à la page 420 de [Meirovitch, 1970] : à la deuxième ligne il faut lire " $x_2 - x_1 = 1$ " et non " $x_3 - x_1 = 1$ ".

<sup>3</sup>En effet, dans le système solaire, les rapports sont quasi toujours au moins inférieurs d'un ordre

$10^{-2}$ ). La Figure 2.2(a) a été obtenue comme suit : on se place dans le repère tournant  $(x, y)$  avec les 2 corps  $m_1$  et  $m_2$  ; l'origine est le centre de masse et l'axe  $x$  est l'axe qui joint  $m_1$  et  $m_2$ , distantes de  $d_{12}$ . On choisit les unités de façon à avoir  $d_{12} = 1$ ,  $G = 1$ ,  $m_1 + m_2 = 1$ , où  $m_2$  est la petite masse et  $m_1$  la grosse. Les courbes de vitesse nulle correspondent alors à

$$v^2 = 2\Phi - C = 0 \quad (2.2)$$

où  $C$  est la constante de Jacobi et où

$$\Phi = U + (x^2 + y^2)/2 + \bar{\tau}(1 - \bar{\tau})/2 \quad (2.3)$$

avec

$$U = (1 - \bar{\tau})/r_1 + \bar{\tau}/r_2 \quad (2.4)$$

où  $r_1$  est la distance entre le 3<sup>e</sup> corps situé en  $(x, y)$  et la masse  $m_1$  (située en  $x_1 = -\bar{\tau}$ ), et  $r_2$  est sa distance par rapport à la masse  $m_2$  (située en  $x_2 = 1 - \bar{\tau}$ ).

On a :

$$v^2 = 2\Phi - C \geq 0 \quad (2.5)$$

On définit ensuite les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{m_2}{m_1} \\ \bar{\tau} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{\tau}{1 + \tau} \\ \tau_2 &= \left(\frac{\tau}{3}\right)^{1/3} \\ d_{12} &= |x_1 - x_2| \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(2.7)$$

Dans le cas Terre( $m_1$ )-Lune( $m_2$ ), et satellite lunaire ( $m_3$ ), on a les valeurs suivantes :

$$\tau \approx \frac{1}{81.3}, \quad \bar{\tau} \approx \frac{1}{82.3}, \quad \tau_2 \approx \frac{1}{6.25}, \quad d_{12} = 385\,000.57 \text{ km} \quad (2.8)$$

La valeur de la constante de Jacobi pour laquelle on se trouve en  $L_1$  est donnée par [Murray and Dermott, 1999] :

$$C_{L_1} \approx 3 + 3^{4/3}\bar{\tau}^{2/3} - 10\bar{\tau}/3 \quad (2.9)$$

et on peut calculer la position précise des points  $L_1$  et  $L_2$  via :

$$\begin{aligned} r_2^{L_1} &= \tau_2 - \tau_2^2/3 + O(\tau_2^3) \\ r_2^{L_2} &= \tau_2 + \tau_2^2/3 + O(\tau_2^3) \end{aligned} \quad (2.10)$$

en unités de distance entre les corps 1 et 2 ( $d_{12}$ ) et avec l'orientation correcte ( $L_1$  est entre les deux masses). Dans le cas Terre-Lune, on a :

$$\begin{aligned} C_{L_1} &= 3.188 \\ r_2^{L_1} &= 0.1515 = 9.1 R_{\oplus} = 58\,327 \text{ km} \\ r_2^{L_2} &= 0.1685 = 10.2 R_{\oplus} = 64\,872 \text{ km} \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec  $R_{\oplus} = 6\,378 \text{ km}$ ,  $d_{12} = d_{\oplus\text{L}} = 385\,000.57 \text{ km}$ . On calcule aussi la différence  $r_2^{L_1} - r_2^{L_2} \approx 1 R_{\oplus}$ . Le point  $L_3$  quant à lui se trouve à environ  $r_2^{L_3} = -1.9929$ . La configuration précise dans le cas Terre-Lune est reprise à la Figure 2.2(a). Les points  $L_4$  et  $L_5$  forment chacun un triangle équilatéral<sup>4</sup> avec la Terre et la Lune. On note aussi qu'il existe des orbites en forme de fer à cheval<sup>5</sup>.

de grandeur ; l'exception étant le couple Pluton-Charon (rapport  $10^{-1}$ ).

<sup>4</sup>Cette configuration existe dans le système solaire : c'est le cas des Troyens dans le système Soleil-Jupiter.

<sup>5</sup>On peut y trouver des satellites coorbitaux ; un cas intéressant est celui de l'objet 2002 AA29

Le point de Lagrange  $L_2$  situé de l'autre côté de la Lune est fort convoité par les défenseurs de la radioastronomie et des programmes SETI [Maccone, 2002] pour être à l'abri de la pollution terrestre; même si ce point est formellement instable [Meirovitch, 1970], on peut trouver des orbites stables autour de  $L_2$  [Murray and Dermott, 1999].

On s'accommode habituellement d'une définition grossière de la sphère d'influence (un rayon fixe). Voyons rapidement comment elle peut être obtenue. Considérons la Figure 2.3, où les notations se suffisent à elles-mêmes.

La sphère d'influence est une question de compétition entre deux corps, qui s'échangent soudainement leur statut de corps central et de corps perturbateur. La définition de la sphère d'influence que nous adopterons ici est celle qui découle de l'égalité des deux rapports entre accélérations perturbatrices et principales. Si l'on place la masse  $m_1$  comme corps central, l'accélération centrale est  $\vec{a}_1^c$ , tandis que l'accélération perturbatrice due au corps  $m_2$  est  $\vec{a}_1^p$  :

$$\vec{a}_1^c = \frac{\mu_1}{r_1^2} \vec{u}_1 \quad \vec{a}_1^p = \frac{\mu_2}{r_2^2} \vec{u}_2 \quad (2.12)$$

où  $\mu_i = \mathcal{G}m_i$ , tandis que si l'on place  $m_2$  comme corps central, on a similairement :

$$\vec{a}_2^c = \frac{\mu_2}{r_2^2} \vec{u}_2 \quad \vec{a}_2^p = \frac{\mu_1}{d_{12}^2} \vec{u} - \frac{\mu_1}{r_1^2} \vec{u}_1 \quad (2.13)$$

le terme en  $\vec{u}$  provenant de l'accélération d'entraînement du satellite  $m_3$ , considéré comme appartenant à  $m_2$  qui tourne, tandis que  $m_1$  est inertiel. On définit dès lors les rapports

$$\epsilon_1 = \frac{|\vec{a}_1^p|}{|\vec{a}_1^c|} \quad \epsilon_2 = \frac{|\vec{a}_2^p|}{|\vec{a}_2^c|} \quad (2.14)$$

que l'on égale pour obtenir l'équation de la forme de la sphère d'influence :

$$\left( \frac{\mu_2}{r_2^2} \right)^2 = \frac{\mu_1^2}{r_1^2 d_{12}^2} \left| \vec{u} - \frac{d_{12}^2}{r_1^2} \vec{u}_1 \right| \quad (2.15)$$

Dans l'hypothèse où

$$r_2 \ll d_{12} \quad (2.16)$$

on a alors  $r_1 \approx d_{12}$ , d'où in fine la taille  $r_2$  de la sphère d'influence :

$$R^S = d_{12} \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^{2/5} \quad (2.17)$$

qui donne dans le cas Terre-Lune :

$$R^S = 0.172 d_{12} \approx 66\,287 \text{ km} \quad (2.18)$$

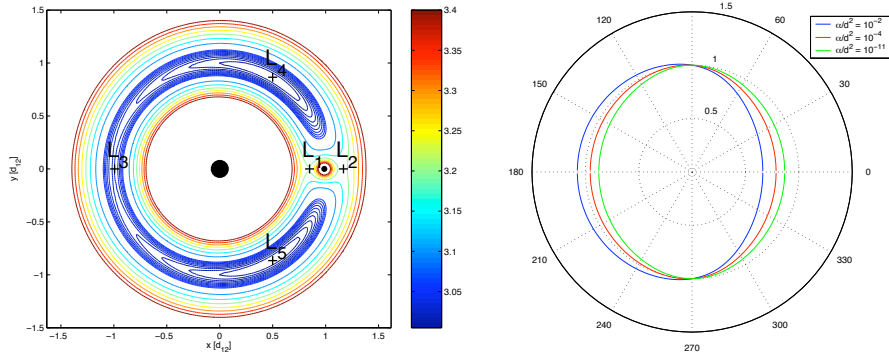
On imagine toutefois que physiquement ce rayon ne peut être identique si on est entre la Terre et la Lune, ou derrière la Lune : la perturbation terrestre étant plus (resp. moins) importante du côté de  $L_1$  (resp.  $L_2$ ), le rayon de la sphère d'influence lunaire devrait être minimal  $R_{min}$  (resp. maximal  $R_{max}$ ) : la sphère d'influence ne devrait donc pas avoir la forme d'une sphère !

Il est connu [CNES, 1998] que pour le système Soleil-Terre ( $\tau \approx 3 \times 10^{-6}$ , on a la relation :

$$R_{min}^S = 0.87 R^S \quad (2.19)$$

Dans le cas Terre-Lune, on a un ordre de grandeur de  $R_{min}^S$  et  $R_{max}^S$  par [Ash, 1976], qui donne les valeurs  $R_{min}^S \approx 8 R_\oplus = 51\,024 \text{ km}$  et  $R_{max}^S \approx 12 R_\oplus = 76\,536 \text{ km}$ .

dans le système Soleil-Terre : c'est le premier véritable objet coorbital avec la Terre, détecté par le programme de sky-survey automatisé LINEAR.



(a) Courbes de vitesse nulle : courbes de niveau  $2\Phi = C$ ; la (petite) masse lunaire  $\bar{\tau} = 1/82.3$  est située à droite (en  $x_2 = 1 - \bar{\tau}$ ) et la (grosse) masse terrestre  $1 - \bar{\tau} = 0.988$  est située à gauche (en  $x_1 = -\bar{\tau}$ ).

(b) Forme de la sphère d'influence en fonction du paramètre  $\alpha/d^2$ . Le cas de la Lune correspond à  $\alpha/d^2 \approx 10^{-4}$ .

FIG. 2.2 – Compétition gravitationnelle entre la Terre et la Lune : trajectoires de satellites et sphère d'influence.

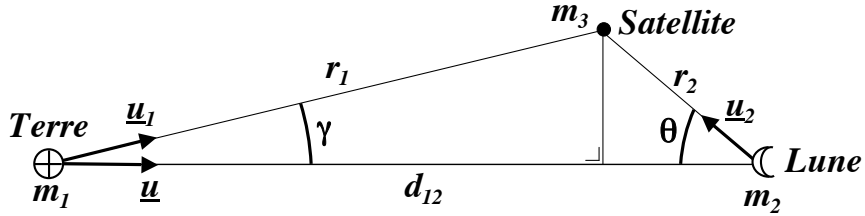


FIG. 2.3 – Géométrie du problème à 3 corps pour le satellite lunaire, et définitions y afférant.

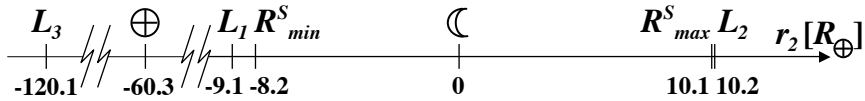


FIG. 2.4 – Positions relatives des points de Lagrange  $L_{1-5}$  et des valeurs extrêmes du rayon de la sphère d'influence le long de l'axe Terre-Lune.

Nous résumons la situation générale à la Figure 2.4 où on a reporté les points particuliers d'intérêt le long de l'axe Terre-Lune. Pour  $R_{min}^S$  et  $R_{max}^S$ , nous avons utilisé notre détermination plus précise donnée ci-après via (2.21) et (2.24) respectivement.

D'autre part, nous avons souhaité connaître la forme exacte de la sphère d'influence ; mais nous n'en avons pas trouvé de description dans la littérature<sup>6</sup> : nous l'avons dès lors calculée nous-mêmes. Nous en donnons au chapitre suivant les grandes étapes du calcul, avec les résultats.

### 2.2.2 Forme exacte de la sphère d'influence

Afin de déterminer la forme exacte de la sphère d'influence, on repart de l'équation (2.15), en levant cette fois l'approximation (2.16).

Pour le calcul de  $R_{min}^S$ , on aboutit, après développements, à la recherche des racines de l'équation :

$$\alpha x^4 = +(d-x)^4(d^2-x^2) \quad (2.21)$$

où l'on utilisé les notations raccourcies  $x = r_1$  et  $d = d_{12}$ , et où l'on a posé :

$$\alpha = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 d^2 \quad (2.22)$$

On vérifie que l'équation (2.21) redonne bien (2.19).

Dans le cas où l'on cherche  $R_{max}^S$ , il faudra résoudre l'équation symétrique :

$$\alpha x^4 = -(d-x)^4(d^2-x^2) \quad (2.23)$$

Et dans le cas général où  $\theta$  est variable, on aboutit à la résolution de

$$\alpha \sin^4 \theta = y^4 d^2 \sqrt{\bar{x}^4 + 1 - 2\bar{x}^2 \sqrt{1-y^2}} \quad (2.24)$$

où l'on a utilisé les notations raccourcies  $y = \sin \gamma$  et où l'on a posé :

$$\bar{x} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-y^2} \sin \theta + y \cos \theta} \quad (2.25)$$

Nous montrons à la Figure 2.2(b) l'allure de la sphère d'influence pour quelques valeurs de  $\alpha/d^2$ , dont le cas de la Lune où  $\alpha/d^2 \approx 10^{-4}$ . Les formules (2.21) et (2.23) donnent respectivement :

$$R_{min}^S \approx 8.2 R_{\oplus} = 52\,099 \text{ km} \quad \text{et} \quad R_{max}^S \approx 10.1 R_{\oplus} = 64\,258 \text{ km} \quad , \quad (2.26)$$

valeurs qui sont repérées sur l'axe Terre-Lune à la Figure 2.4. La distorsion de la sphère d'influence est loin d'être négligeable, puisqu'on a

$$R_{max}^S / R_{min}^S = 1.23 \quad (2.27)$$

valeur qui diffère assez bien de la valeur  $\sqrt[5]{2}$  annoncée par [Tisserand, 1896].

<sup>6</sup>Les deux seules descriptions plus précises que (2.17) que nous ayons trouvées dans la littérature sont deux *approximations* : l'une, fort compliquée, donnée par un certain James S. Miller (1962), sans référence bibliographique, dans l'ouvrage [Battin, 1987], et l'autre, plus simple, est donnée par [Tisserand, 1896] :

$$R_T^S(\theta) = d_{12}(\tau^2 / \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta})^{1/5} \quad (2.20)$$

où  $\theta$  est l'angle à partir de l'axe qui joint les deux corps considérés.



### 2.2.3 Conclusion

Nous avons relevé les différentes perturbations qui pouvaient agir sur un satellite lunaire, et étudié en détail l'interaction Terre-Lune. Afin de prendre en compte la Terre dans notre théorie des perturbations, nous définissons un paramètre de perturbation terrestre :

$$\gamma \equiv \text{paramètre de perturbation lié à la Terre} \quad (2.28)$$

qui vient s'ajouter aux paramètres  $n_{\mathcal{A}}, \epsilon, \delta$  définis en 1.67 et dont nous donnerons l'expression exacte au Chapitre 8.

## Chapitre 3

# Théorie des Perturbations & Transformées de Lie symplectiques

Les techniques de perturbation sont un outil puissant, développé principalement en Mécanique Céleste, afin d'obtenir une solution pour un système perturbé (par des effets gravitationnels secondaires) pour lequel on connaît déjà la solution non-perturbée (l'orbite de Kepler).

Historiquement, les premières méthodes ont été développées dans le cadre non-canonique. Elles consistent principalement en la méthode de variation des coordonnées (qui permet des prédictions à court terme, suivant le travail d'Euler, Clairaut et même de Newton auparavant), et en la méthode de variation des éléments (qui permet des prédictions à long terme via le concept d'orbite osculatrice), suivant le travail d'Euler, Lagrange, Laplace et Poisson.

Vint ensuite le cadre canonique suggéré par Hamilton, qui a l'avantage que les équations du mouvement s'écrivent sous une forme extrêmement simple (de simples dérivées de l'Hamiltonien, et du premier ordre de surcroît).

De plus, les méthodes de perturbation canonique ont beaucoup d'avantages [Boccaletti and Pucacco, 1999] ; entre autres :

- l'introduction d'une transformation canonique proche de l'identité a permis d'écrire les équations du mouvement perturbé à n'importe quel ordre comme des équations canoniques,
- l'introduction de variables angle-action a permis d'identifier dans un tore de dimension  $n$  la variété sur laquelle le système est confiné (d'où l'interprétation géométrique de la perturbation, avec le problème des petits dénominateurs, la théorie de KAM et le chaos).

Ainsi nous nous placerons dans ce cadre canonique suggéré par Hamilton ; et nous utiliserons dans ce travail l'algorithme de la Transformée de Lie de Hori ou de Deprit [Deprit, 1969] pour moyenniser l'Hamiltonien du problème. Notons toutefois que les méthodes canoniques de perturbation ne sont pas uniques.

Nous rappelons ici les éléments essentiels de la théorie des Perturbations utilisée, et décrivons comment nous allons l'utiliser dans le cadre précis du développement de notre théorie.

### 3.1 Transformées de Lie symplectiques

Considérons une transformation des coordonnées  $y$  vers les coordonnées  $x$ , développée en série de puissance d'un<sup>1</sup> "petit" paramètre  $\epsilon$ , et proche de l'identité :

$$x = \mathcal{X}(y, \epsilon) = y + \epsilon \mathcal{X}_1(y) + \epsilon^2 \mathcal{X}_2(y) + \dots \quad (3.1)$$

Pour  $\epsilon$  suffisamment petit, la transformation est toujours inversible :

$$y = \mathcal{Y}(x, \epsilon) = x + \epsilon \mathcal{Y}_1(x) + \epsilon^2 \mathcal{Y}_2(x) + \dots \quad (3.2)$$

On peut définir cette transformation comme la solution du système auxiliaire d'équations différentielles :

$$\frac{dx}{d\epsilon} = \mathcal{W}(x, \epsilon) \quad (3.3)$$

pour les conditions initiales  $x(\epsilon = 0) = y$ .

La transformation (dépendant du paramètre  $\epsilon$ ) est alors considérée comme étant un flot engendré par un système d'équations différentielles non autonome. Notons que cela peut toujours se faire : on peut toujours prendre pour *champ de vecteurs générateur*, le champ de vecteurs

$$\mathcal{W}(x, \epsilon) = \left[ \frac{\partial \mathcal{X}(y, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right]_{y=\mathcal{Y}(x, \epsilon)} \quad (3.4)$$

étant donné la transformation  $x = \mathcal{X}(y, \epsilon)$ .

Dans le cas du système hamiltonien, on a :

$$\dot{x} = \mathcal{I} \mathcal{H}_x^T \quad (3.5)$$

où  $\mathcal{I}$  est la matrice symplectique, et avec

$$x = (q_i, p_i) \quad (3.6)$$

où les  $q_i$  sont les coordonnées généralisées et les  $p_i$  les moments généralisés. Nous souhaitons alors absolument conserver ce caractère hamiltonien. Cela restreint alors le groupe des transformées de Lie au sous-groupe des transformées de Lie symplectiques : il faut et il suffit pour cela d'imposer que le champ de vecteurs générateur  $\mathcal{W}$  soit un champ hamiltonien :

$$\mathcal{W} = \mathcal{I} \mathcal{W}_x^T \quad (3.7)$$

Nous définissons donc les transformées de Lie symplectiques (3.1) comme la solution d'un système hamiltonien auxiliaire :

$$\frac{dx}{d\epsilon} = \mathcal{I} \mathcal{W}_x^T \quad (3.8)$$

### 3.2 Algorithme de calcul

Si l'on développe en série de Taylor en  $\epsilon$  la fonction  $f(\mathcal{X}(y, \epsilon), \epsilon)$  autour de  $\epsilon = 0$ , on trouve que la transformée  $g(y, \epsilon)$  de toute fonction analytique  $f(x, \epsilon)$  par la transformation (3.1) engendrée par le champ de vecteur générateur (3.8) est donné

<sup>1</sup>Dans la pratique, les Hamiltoniens initiaux seront fonctions de plusieurs petits paramètres  $\epsilon_i$ , et les couplages apparaissant aux ordres supérieurs donneront lieu à des Hamiltoniens moyennisés comportant des produits du genre  $\epsilon_1^{n_1} \times \epsilon_2^{n_2}$ . Comme il s'agit d'un nombre fini de termes, il n'y a pas de problèmes de convergence. Il serait néanmoins utile de classer les paramètres de perturbation suivant leur ordre de grandeur afin d'éviter les calculs inutiles.

par :

$$g(y, \epsilon) = f(\mathcal{X}(y, \epsilon), \epsilon) = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon^i}{i!} [D^i f(x, \epsilon)]_{x=y; t=0} \quad (3.9)$$

où l'opérateur  $D$  est défini par :

$$Df(x, \epsilon) = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathcal{W}_x^T = \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + (f; \mathcal{W}) \quad (3.10)$$

et où  $(f; \mathcal{W})$  représente la parenthèse de Poisson des deux fonctions :

$$(f; \mathcal{W}) \equiv f_x \mathcal{W}_x^T = \sum_i \left( + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) \quad (3.11)$$

Les formules (3.9) et (3.10) permettent de décrire un algorithme de calcul simple et systématique. Etant donné la fonction analytique :

$$f(x, \epsilon) = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} f_i^{(0)}(x), \quad (3.12)$$

et le champ de vecteur générateur :

$$\mathcal{W} = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{W}_{i+1}(x), \quad (3.13)$$

on construit successivement les fonctions intermédiaires  $f_i^{(j)}(x)$  du développement des dérivées :

$$\frac{d^j}{d\epsilon^j} f(\mathcal{X}(y, \epsilon), \epsilon) = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} f_i^{(j)}(x), \quad (3.14)$$

par la formule de récurrence :

$$f_i^{(j)} = f_{i+1}^{(j-1)} + \sum_{k=0}^i C_i^k \left( f_{i-k}^{(j-1)}; \mathcal{W}_{k+1} \right) \quad (3.15)$$

où

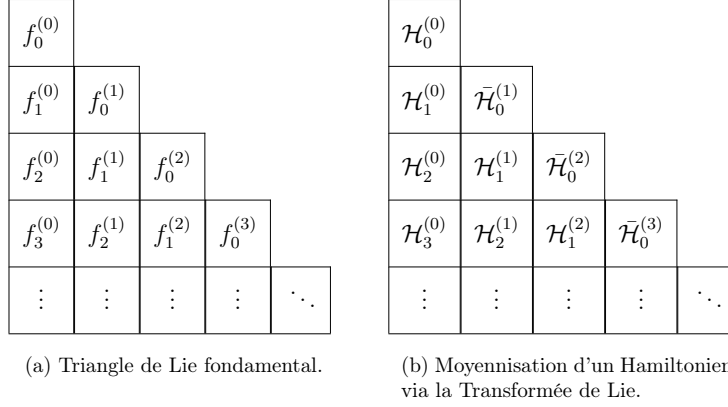
$$C_i^k = \binom{i}{k} = \frac{i!}{k!(i-k)!} \quad (3.16)$$

La transformée  $g(y, \epsilon)$  de la fonction  $f(x, \epsilon)$  est alors donnée par :

$$g(y, \epsilon) = \sum_{i=0} \frac{\epsilon^i}{i!} \left[ f_0^{(i)}(x) \right]_{x=y} \quad (3.17)$$

La récurrence est plus facile à visualiser si l'on considère les fonctions intermédiaires  $f_i^{(j)}$  disposées, comme à la Figure 3.1(a), en un triangle, appelé le triangle de Lie. Le calcul d'un élément implique toutes les fonctions de la colonne précédente situées au-dessus ou à la même hauteur et seulement ces fonctions-là. De même, ce calcul ne demande la connaissance que de  $\mathcal{W}_k$  avec  $k \leq$  au numéro de la ligne de la fonction intermédiaire cherchée (ce numéro se trouve également être la somme des indices).

On utilisera cet algorithme pour transformer les Hamiltoniens ( $f = \mathcal{H}$ ). Dans le cas hamiltonien, il suffit en effet de simplifier la fonction Hamiltonienne pour simplifier les équations différentielles. La transformation qui nous intéresse est celle qui fait disparaître les angles rapides ; on utilisera la notation  $\bar{\mathcal{H}}$  pour se souvenir que l'Hamiltonien a été moyennisé. A la limite, si on supprime tous les angles, les nouveaux moments deviennent constants et les nouveaux angles sont tout simplement des fonctions linéaires du temps : le nouveau système est complètement intégrable et trivialement intégré.



**FIG. 3.1** – Triangle de Lie fondamental (a) et moyennisation d'un Hamiltonien (b).

### 3.3 Equation homologique et convergence

A chaque ordre  $k$ , il s'agira de résoudre le même type d'équation : l'équation dite *homologique* :

$$\mathcal{H}_0^{(k)} - \tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)} = \left( \mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_k \right) = - \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\partial \mathcal{W}_k}{\partial q_i} \quad (3.18)$$

où  $\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)}$  représente une quantité connue et où on s'est arrangé pour ne mettre dans le noyau  $\mathcal{H}_0^{(0)}$  qu'une fonction des moments  $p_i$  seulement. Afin de trouver le générateur, il s'agira de procéder à une intégration suivant les angles  $q_i$ .

Pour voir ce que cela donne, développons (3.18) en série de Fourier :

$$\tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)} - \mathcal{H}_0^{(k)} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \left[ C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left( \sum_{k=1}^n i_k q_k \right) + S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left( \sum_{k=1}^n i_k q_k \right) \right] \quad (3.19)$$

on a alors formellement :

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} \frac{C_{i_1, i_2, \dots, i_n} \sin \left( \sum_{k=1}^n i_k q_k \right) - S_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cos \left( \sum_{k=1}^n i_k q_k \right)}{\sigma_{i_1, i_2, \dots, i_n}} \quad (3.20)$$

avec

$$\sigma_{i_1, i_2, \dots, i_n} = \sum_{k=1}^n i_k \omega_k \quad (3.21)$$

Il convient de vérifier qu'aucun des  $\sigma_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  ne s'annule. Deux situations peuvent se présenter : soit tous les indices sont nuls, mais alors il suffit de mettre ce terme dans le nouvel Hamiltonien  $\mathcal{H}_0^{(k)}$ , soit on est dans un cas de résonance. Mais dans le cas du satellite lunaire, les périodes sont bien distinctes, ce qui fait qu'il n'y a pas de résonance. Et quand  $\sigma_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  n'est pas nul, il faut et il suffit de choisir :

$$\mathcal{H}_0^{(k)} = \langle \tilde{\mathcal{H}}_0^{(k)} \rangle \quad (3.22)$$

où  $\langle \bullet \rangle$  signifie la valeur moyenne sur les angles.

En toute rigueur, il faudrait de surcroît prouver que les séries convergent ; nous évitons cet écueil en nous limitant d'emblée à un ordre  $N$  *fini* :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{H}_i^{(0)} \quad \mathcal{W} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\epsilon^i}{i!} \mathcal{W}_{i+1} \quad \bar{\mathcal{H}} = \sum_{i=0}^N \frac{\epsilon^i}{i!} \bar{\mathcal{H}}_0^{(i)} \quad (3.23)$$

ce qui signifie que les équations différentielles ne seront simplifiées que jusqu'à l'ordre  $N$  ; ce qui est suffisant en pratique.

### 3.4 Triangles de Lie considérés pour le satellite lunaire

Nous avons défini dans les chapitres précédents les quatre paramètres de perturbation suivants :

$$\left\{ \begin{array}{ll} n_{\mathcal{L}} & \text{lié à la rotation lunaire} \\ \epsilon & \text{lié à l'aplatissement de la Lune} \\ \delta & \text{lié à la rotation synchrone de la Lune} \\ \gamma & \text{lié au 3<sup>e</sup> corps (Terre)} \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Ces paramètres ont été laissés sous forme de variables lors des calculs, ce qui procure de nombreux avantages :

1. tous les couplages possibles sont automatiquement calculés. Ceci constitue également une des originalités de notre travail, car dans d'autres ouvrages on sélectionne souvent arbitrairement certains couplages seulement ;
2. les calculs sont plus systématiques et limitent les erreurs ;
3. on peut adapter facilement la valeur de ces paramètres : la théorie présentée reste valable et utilisable dans d'autres cas de figure.

Nous allons à présent considérer plusieurs triangles de Lie de complexité croissante. Ils correspondent à l'addition progressive de ces différents effets perturbateurs, ajoutés séparément afin de bien percevoir l'effet de chacun d'entre eux.

Nous présentons à la Table 3.1 les principaux triangles de Lie *symboliques* considérés dans cette thèse, en même temps que les notations y afférant. Nous avons ajouté des indices ou exposants aux  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{W}$  afin de pouvoir repérer de quel type de perturbation ou de quel terme de couplage il s'agit (nous avons plus exactement réutilisé la place du 0 et (0), comme par exemple  $\mathcal{H}_1^\epsilon$  au lieu de  $\mathcal{H}_1^{(0)}$  et  $\bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}$  au lieu de  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}$ ).

Nous avons ensuite considéré deux triangles de Lie *numériques* afin de procéder à un classement plus précis des termes ; nous les présentons à la Table 3.2 et ce sont eux in fine qui nous feront aboutir à l'Hamiltonien final utilisable dans le cadre de l'analyse de mission.

Le problème <i>principal</i> du satellite artificiel (voir Chapitre 5) :		
$\mathcal{H}_0^{(0)}$		
$\epsilon \mathcal{H}_1^\epsilon$	$\epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}$	$\mathcal{W}_1 = \epsilon \mathcal{W}_1^\epsilon$
0	$\mathcal{H}_1^{(1)}$	$\epsilon^2 \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\epsilon}^{(2)} \quad \mathcal{W}_2 = \epsilon^2 \mathcal{W}_2^{\epsilon\epsilon}$
Le problème <i>zonal complet</i> du satellite artificiel (voir Chapitre 6) :		
$\mathcal{H}_0^{(0)}$		
$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{H}_{1,n}^{(0)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$	$\mathcal{W}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{W}_{1,n}$
Le problème <i>principal</i> du satellite artificiel <i>synchrone</i> (voir Chapitre 7) :		
$\mathcal{H}_0^{(0)}$		
$\epsilon \mathcal{H}_1^\epsilon + \delta \mathcal{H}_1^\delta$	$\epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_\delta^{(1)}$	
0	$\mathcal{H}_1^{(1)}$	$\epsilon^2 \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\epsilon}^{(2)} + \epsilon\delta \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\delta}^{(2)} + \delta^2 \bar{\mathcal{H}}_{\delta\delta}^{(2)}$
$\mathcal{W}_1 = \epsilon \mathcal{W}_1^\epsilon + \delta \mathcal{W}_1^\delta$		
$\mathcal{W}_2 = \epsilon^2 \mathcal{W}_2^{\epsilon\epsilon} + \epsilon\delta \mathcal{W}_2^{\epsilon\delta} + \delta^2 \mathcal{W}_2^{\delta\delta}$		
Le problème <i>complet</i> du satellite artificiel <i>lunaire</i> (voir Chapitre 8) :		
$\mathcal{H}_0^{(0)}$		
$\mathcal{H}_1^{(0)} = -n_\alpha H + \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i$	$\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} = \mathcal{H}_1^{(0)}$	
$\epsilon \mathcal{H}_2^\epsilon + \delta \mathcal{H}_2^\delta + \gamma \mathcal{H}_2^\gamma$	$\mathcal{H}_1^{(1)}$	$\epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(2)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_\delta^{(2)} + \gamma \bar{\mathcal{H}}_\gamma^{(2)}$
$\mathcal{W}_1 = 0$		
$\mathcal{W}_2 = \epsilon \mathcal{W}_2^\epsilon + \delta \mathcal{W}_2^\delta + \gamma \mathcal{W}_2^\gamma$		

 TAB. 3.1 – Les principaux triangles de Lie *symboliques* considérés dans cette thèse, et notations y afférant.

*Première moyennisation :*  
 élimination des fréquences de l'ordre de l'heure (voir Chapitre 1) :

$\mathcal{H}_0^{(0)}$				
$\mathcal{H}_1^{(0)} = -\bar{n}_\mathcal{A}H + \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i$	$\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} = \mathcal{H}_1^{(0)}$			
$\bar{\epsilon} \mathcal{H}_{2\epsilon}^{(0)} + \bar{\delta} \mathcal{H}_{2\delta}^{(0)} + \bar{\gamma} \mathcal{H}_{2\gamma}^{(0)}$	$\mathcal{H}_1^{(1)}$	$\bar{\epsilon} \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(2)} + \bar{\delta} \bar{\mathcal{H}}_\delta^{(2)} + \bar{\gamma} \bar{\mathcal{H}}_\gamma^{(2)}$		
0	$\mathcal{H}_2^{(1)}$	$\mathcal{H}_1^{(2)}$	$\bar{\mathcal{H}}_0^{(3)}$	
0	$\mathcal{H}_3^{(1)}$	$\mathcal{H}_2^{(2)}$	$\mathcal{H}_1^{(3)}$	$\bar{\mathcal{H}}_0^{(4)}$

Les couplages suivants entre perturbations seront automatiquement calculés :

à l'ordre 1 :  $(\bar{n}_\mathcal{A}, \omega_i)$

à l'ordre 2 :  $(\bar{\epsilon}, \bar{\delta}, \bar{\gamma})$

à l'ordre 3 :  $(\bar{n}_\mathcal{A}, \omega_i) \times (\bar{\epsilon}, \bar{\delta}, \bar{\gamma})$

à l'ordre 4 :  $(\bar{n}_\mathcal{A}, \omega_i) \times (\bar{n}_\mathcal{A}, \omega_i) \times (\bar{\epsilon}, \bar{\delta}, \bar{\gamma})$  et  $(\bar{\epsilon}, \bar{\delta}, \bar{\gamma}) \times (\bar{\epsilon}, \bar{\delta}, \bar{\gamma})$

*Deuxième moyennisation :*  
 élimination des fréquences de l'ordre du mois (voir Chapitre 12) :

$\mathcal{K}_0^{(0)}$			
$\mathcal{K}_1^{(0)}$	$\bar{\mathcal{K}}_0^{(1)}$		
$\mathcal{K}_2^{(0)}$	$\mathcal{K}_1^{(1)}$	$\bar{\mathcal{K}}_0^{(2)}$	
$\mathcal{K}_3^{(0)}$	$\mathcal{K}_2^{(1)}$	$\mathcal{K}_1^{(2)}$	$\bar{\mathcal{K}}_0^{(3)}$

TAB. 3.2 – Le problème complet du satellite artificiel : les deux triangles de Lie *numériques* considérés dans cette thèse, et notations y afférant.





## Chapitre 4

# Outil de calcul symbolique : le MM

La quantité importante de calculs symboliques (dizaines de milliers de termes) élimine d'emblée un traitement manuel. Dans un premier temps, nous avons utilisé un logiciel de calcul symbolique (Maple), mais d'une part les résultats n'étaient pas très lisibles (car les résultats sont souvent étalés de façon pas très ordonnée sur de nombreuses pages contenant un grand nombre de termes pour une seule quantité), et d'autre part le temps de calcul était souvent prohibitif.

Nous préférons ainsi utiliser un programme spécifique, le *MM* ("*Moon's series Manipulator*"), qui a été développé dans notre Université au sein de l'équipe de Mécanique Céleste (Systèmes Dynamiques). Le *MM* présente les séries sous une forme tabulée claire et ordonnée, et calcule beaucoup plus vite : le gain typique en CPU est de deux ordres de grandeur ! Le programme *MM* est basé sur l'idée décrite dans [Henrard J., 1986], et a ensuite été amélioré par [Moons, 1993]. Dans cet outil, chaque expression est composée d'une série de fonctions trigonométriques linéaires, avec des coefficients polynomiaux (séries de Poisson), du genre :

$$\alpha \prod_{i=1}^{NVP} P_i^{\exp(i)} \begin{pmatrix} \cos \\ \sin \end{pmatrix} \left( \sum_{j=1}^{NVT} \arg(j) q_j \right) . \quad (4.1)$$

où  $\alpha$  est un réel,  $P_i$  les variables polynomiales,  $q_j$  les variables trigonométriques,  $NVP$  et  $NVT$  les nombres de variables polynomiales et trigonométriques,  $\exp(i)$  et  $\arg(j)$  des entiers.

Le package est muni de diverses opérations, du genre  $+$ ,  $\times$ ,  $\partial/\partial$ , et coupure de séries à une précision numérique donnée.

Il comporte des variables trigonométriques et variables polynomiales ; nous reprenons à la Table 4.1 celles que nous avons codées afin de pouvoir traiter notre problème. Nous avons souvent réutilisé localement les variables pour d'autres besoins, en vérifiant bien qu'il n'y avait pas de risque de confusion (e.g. algorithme de Jefferys).

N° codage symbole	trigonométriques										polynomiales									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	f	g	h	L	*	D	l	p	l	*	F	u	T	e	x	i	a	n	e	e
	f	g	h	L	D	l	p	l	F	u	T	e	x	i	a	n	e	e	e	e

TAB. 4.1 – Codage des variables dans le MM.

Un exemple d'une telle série est donné à la Table 4.2.

	$f$	$g$	$h$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	$n_\delta$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	$0.1000000000000000D+01$
cos	1	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	$0.1000000000000000D+01$

TAB. 4.2 – La série définissant  $\xi = \frac{1+e \cos f}{\eta^2}$ .

Quand on multiplie de telles séries, cela produit de plus en plus de termes, toujours réduits sous une forme linéaire par les formules de duplication classiques du genre :

$$2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B) \quad (4.2)$$

mais cela présente le désavantage de doubler le nombre de termes à chaque fois.

La préoccupation de garder des expressions linéaires est motivée par le fait que nous souhaitons garder des intégrations faciles.

Le programme MM a subi plusieurs reliftings (versions F77 à 2 bytes, 3, 4, et F90) durant cette thèse, notamment afin de pouvoir accepter un plus grand nombre de variables, et d'effectuer plus efficacement des produits de séries. Certains produits de  $10\,000 \times 1000$  termes, s'ils sont effectués complètement, prenaient en effet énormément de temps, alors que l'on coupait de toute façon le résultat à la fin. Dans cette optique, la routine **PRODC**T a été salvatrice : elle n'effectue que les produits de termes qui donnent une contribution de l'ordre de la précision demandée.

L'augmentation du nombre de variables à traiter est inévitable si on souhaite, comme c'est notre cas, garder une trace des différents couplages, afin de pouvoir modifier un paramètre donné ( $J_2$ , etc.) de façon isolée au stade final. De plus, les puissances de ces variables augmentent bien entendu aux ordres supérieurs.

Nous avons étendu (voir Annexe I) les possibilités du MM en y incluant le traitement de fractions symboliques pour les coefficients (au lieu de numérique double précision). C'est une nécessité qui s'est fait sentir lors de la vérification de nos formules analytiques développées au Chapitre 6.

Maintenant que nous avons pris connaissance de l'outil, utilisons-le pour élaborer notre théorie analytique.

## Deuxième partie

### MOYENNISATION DES COURTES PÉRIODES



Dans cette partie nous traiterons de la première moyennisation, qui consiste en l'élimination de l'angle rapide lié la période du satellite (angle  $l$ , fréquence  $n$ ). C'est de loin cette moyennisation qui est la plus ardue, de par la nature mathématique des fonctions à intégrer.

L'élimination de  $l$  nécessite le calcul de valeurs moyennes (et éventuellement la quadrature) de plusieurs fonctions dépendant implicitement de cette variable via les autres anomalies (soit l'anomalie vraie  $f$ , soit l'excentrique  $u$ ).

Nous définissons d'emblée les variables auxiliaires suivantes, qui interviendront de façon récurrente dans notre théorie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \phi & = & f - l \\ \psi & = & u - l \\ c_+ & = & 1 + c \\ c_- & = & 1 - c \\ \beta & = & \frac{1 - \eta}{e} = \frac{e}{1 + \eta} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où  $c = \cos i$  (voir (5.9)).

La variable  $\phi$  est l'équation du centre, qui intervient à de nombreux endroits en Mécanique Céleste, et ici lors du calcul de l'effet de  $J_2$ . Les variables  $c_+$  et  $c_-$  interviennent lors du calcul de l'effet du  $C_{22}$ . La variable  $\psi$  apparaît en traitant le 3<sup>e</sup> corps. Quant à  $\beta$ , il apparaît dans diverses valeurs moyennes (voir [Kozai, 1962b]).

Au fur et à mesure que l'on monte dans les ordres, les intégrales sont de plus en plus complexes à calculer.

Nous considérons ici le cas le plus intéressant, qui est la forme fermée, c'est-à-dire qu'aucun développement en excentricité n'est effectué. Différents types de fonctions ont été moyennisées par plusieurs auteurs ; nous en donnons ici un aperçu rapide et non exhaustif :  $\langle \cos kf \rangle$  [Brouwer, 1959],  $\langle \cos ku \rangle$  [Kozai, 1962a] et aussi  $\langle \xi^n \rangle$  dans le travail fondateur de [Tisserand, 1889], de même que  $\langle \xi^n \cos kf \rangle$  avec  $n - k < 2$ , les deux étant repris dans [Kozai, 1962b]. La quantité  $(f - l)$  jouant un rôle important dans les ordres supérieurs du problème principal du satellite artificiel [Deprit and Rom, 1970, Aksnes, 1971, Coffey and Deprit, 1982], nous avons également à faire face à  $\langle (f - l) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (kf) \rangle$  [Métris, 1991].

Plus récemment, des algorithmes généraux ont été suggérés pour calculer les quadratures de familles de fonctions, comme  $\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (kf + \alpha)$  et  $\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (ku + \alpha)$  [Kelly, 1989] ; et aussi des classes de fonctions plus générales telles que  $\sum P(r, \dot{r}) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (jf + ku + \phi)$  [Jefferys, 1971], ou même  $\sum P(r, R) \exp^{i(jf + ku)}$  [Osácar and Palacián, 1994].

Nous nous sommes joints à tous ces auteurs en proposant à notre tour les valeurs moyennes de quelques familles de fonctions. Notons également que certains auteurs ont aussi calculé les générateurs.



## Chapitre 5

# Le problème principal du Satellite Artificiel : $J_2$

Dans ce chapitre, nous allons considérer l'effet de  $J_2$  seul, ce qui correspond à l'appellation consacrée "le problème principal du Satellite Artificiel". Le coefficient  $J_2$  joue en effet un rôle prépondérant dans la dynamique car il est le plus influent des coefficients zonaux. Nous considérons ici le triangle de Lie du second ordre en  $\epsilon$ , esquissé à la Figure 3.1.

Dans cette partie, nous soulignons surtout un résultat intermédiaire du développement de notre théorie analytique plus complète d'un satellite artificiel lunaire, qui est le calcul du générateur de Lie du second ordre  $\mathcal{W}_2^{\epsilon\epsilon}$  pour l'effet de  $J_2$  seul, ainsi que sa validation par rapport à la littérature.

La série  $\mathcal{W}_2^{\epsilon\epsilon}$  est donnée sous forme explicite. Ce générateur a déjà été calculé par plusieurs auteurs, mais soit à la main par le passé, ou à l'aide d'autres méthodes de perturbation. Il s'agit donc de comparer les résultats de 2 méthodes canoniques différentes (la Transformée de Lie et la méthode de von Zeipel), dans différents jeux de variables. Les difficultés de calcul et des problèmes de simplification ont été surmontées ; des astuces sont données pour l'intégration. Nous retrouvons exactement le résultat de Kozai, à savoir le générateur de von Zeipel  $S_2$ , terme pour terme, à partir de notre générateur de Lie  $\mathcal{W}_2$ , ce qui constitue une validation des résultats de part et d'autre. En chemin, des résultats partiels de Brouwer, Kozai et Aksnes sont aussi reproduits, ce qui valide notre travail.

Bien sûr, des théories d'ordre plus élevé ont été élaborées pour l'effet de  $J_2$ , comme par exemple [Coffey and Deprit, 1982] ( $J_2^3$ ), mais ce n'est pas notre but ici d'atteindre de tels ordres. Coffey utilise également une méthode différente, plus lourde : la transformation est faite en deux étapes séparées (la première étant l'élimination de la parallaxe et la seconde étant la transformation des variables de Whittaker's vers les éléments de Delaunay) au lieu d'une seule ici.

La première école est celle de Poincaré - von Zeipel, suivant le travail initié par Jacobi. La méthode consiste essentiellement à introduire une transformation canonique proche de l'identité, à l'aide d'une fonction génératrice  $S$  (développée en série de puissance d'un petit paramètre  $\epsilon$ ) qui *doit être* dans des variables mixtes, c'est-à-dire du genre  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t)$ , où  $S$  dépend à la fois des "anciennes" variables



$\mathbf{q}^1$  et des "nouveaux" moments  $\mathbf{P}$ . La transformation elle-même est donc mixte, puisqu'on a par exemple  $\mathbf{Q} = \partial S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) / \partial \mathbf{P}$ , tandis qu'il eût été préférable d'avoir  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ . Cette particularité constitue un inconvénient majeur de la méthode de von Zeipel : pour obtenir les éléments osculateurs en fonction de  $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ , il faut inverser des fonctions et procéder à des substitutions.

Ces difficultés, qui rendaient les calculs de perturbation très fastidieux, même aux ordres peu élevés, ont été surmontées par l'introduction de l'algorithme des transformées de Lie par Hori [Hori, 1966] et Deprit [Deprit, 1969]. Une description de ces deux méthodes canoniques (von Zeipel et Lie) peut être trouvée dans [von Zeipel, 1916] et [Deprit, 1969] respectivement. Il existe un lien entre elles, développé dans [Shniad, 1970], qui permet la comparaison de résultats émanant des 2 méthodes. Nous en aurons besoin puisque nous avons utilisé les Transformées de Lie tandis que la méthode de von Zeipel a été utilisée de façon extensive à la fois par Brouwer et Kozai, qui a étendu les résultats de Brouwer, dans le cadre de la théorie du satellite artificiel. Ils ont considéré le petit effet de  $J_2$ , dans les variables de Delaunay  $(L, G, H, l, g, h)$ , avec des fonctions génératrices du genre  $S(L', G', H', l, g, h)$ .

La structure de ce chapitre est la suivante. Nous définissons les variables et appliquons la Transformée de Lie au problème principal du satellite artificiel (premier et second ordre) au §5.1. Les résultats sont ensuite décrits au §5.2. Nous donnons quelques astuces pour l'intégration au §5.3, et nous discutons quelques problèmes de simplification au §5.4. On rappelle le résultat de [Shniad, 1970] au §5.5 concernant l'équivalence entre Théories des Perturbations. Sur cette base, la comparaison des résultats du premier et second ordre est faite aux §5.6 et §5.7. On conclut ensuite au §5.8. L'Annexe C contient la série du générateur  $\mathcal{W}_2^{ec}$ .

## 5.1 Le problème principal du satellite artificiel via les Transformées de Lie

Afin de pouvoir travailler dans le formalisme Hamiltonien, nous devons avant tout définir un système de référence inertiel et utiliser des variables canoniques.

Nous définissons le système de référence inertiel  $(x, y, z)$  comme suit (voir Figure 5.1) : l'origine est prise au centre de la Lune et le plan  $(x, y)$  est le plan équatorial lunaire. Afin de pouvoir utiliser les expressions des harmoniques sphériques pour le potentiel, nous devons définir des coordonnées sphériques  $(r, \lambda, \phi)$  ; dans le cas zonal nous n'avons toutefois besoin que de la latitude  $\phi$ , qui est définie comme la déviation à partir du plan  $(x, y)$ .

En ce qui concerne les variables, nous choisissons d'utiliser les variables classiques de Delaunay :

$$\Lambda \equiv (l, g, h, L, G, H) \quad (5.1)$$

définies par :

$$\begin{aligned} l &= u - e \sin u & L &= \sqrt{\mu a} \\ g &= \omega & G &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \\ h &= \Omega & H &= \sqrt{\mu a(1 - e^2)} \cos i \end{aligned} \quad (5.2)$$

<sup>1</sup>Les vecteurs seront notés en gras dans cette partie.

où  $(a, e, i, \omega, \Omega)$  sont les éléments kepleriens,  $\mu = \mathcal{G}M_{\mathcal{G}}$ ,  $l$  et  $u$  sont les anomalies moyenne et excentrique respectivement. Dans ces variables, le potentiel non perturbé qui est le terme central du problème des 2 corps (voir 1.20) s'exprime simplement par :

$$\mathcal{H}_0^{(0)} = -\frac{\mu^2}{2L^2} \quad (5.3)$$

et les équations hamiltoniennes du mouvement s'écrivent extrêmement simplement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{l} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} & \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l} \\ \dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} & \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} \\ \dot{h} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} & \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Considérons à présent le problème principal du satellite artificiel. La partie du potentiel correspondant à  $J_2$  est :

$$V_{20} = \frac{\mu}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^2 J_2 P_{20}(\sin \phi) \quad \text{avec} \quad P_{20}(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (5.5)$$

où  $\phi$  représente ici la latitude, et qui peut être réécrite en vue de lui appliquer la méthode des Transformées de Lie comme étant :

$$\mathcal{H}_1^{(0)} = \epsilon \mathcal{H}_1^\epsilon \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_1^\epsilon = \frac{\mu}{2r^3} (3 \sin^2 \phi - 1) \quad (5.6)$$

où  $\epsilon = J_2 R^2$ .

Nous pouvons passer partiellement aux variables canoniques en utilisant la relation de trigonométrie sphérique suivante (voir Figure 5.1) :

$$\sin \phi = \sin i \sin(f + g) \quad (5.7)$$

où  $i$  est l'inclinaison du plan de l'orbite du satellite.

A ce stade, il reste dans (5.5) à exprimer  $r$  et  $f$  comme des fonctions de  $(l, g, h)$  afin de pouvoir appliquer une méthode de perturbation canonique. Il se fait que les fonctions  $r = r(l, g, h)$  et  $f = f(l, g, h)$  ne peuvent être exprimées sous forme fermée, et que l'on retombe habituellement ici dans des développements en séries de l'excentricité. Nous souhaitons l'éviter, et ce au moins pour les raisons suivantes : les résultats seraient bien moins compacts, d'où une difficulté accrue pour l'interprétation ; de plus ces derniers ne seraient plus valables pour des valeurs plus grandes de l'excentricité.

Nous choisissons dès lors d'utiliser plutôt le jeu suivant de variables auxiliaires afin de décrire la position du satellite artificiel lunaire :

$$\Xi \equiv (\xi, f, u, g, h, a, n, e, \eta, s, c) \quad (5.8)$$

avec :

$$\begin{array}{ll} \xi = \frac{a}{r} = \frac{1+\epsilon \cos f}{1-\epsilon^2} = \frac{1}{1-\epsilon \cos u} & f \quad \text{et} \quad u \\ g & h \\ a = \frac{L^2}{\mu} & n = \frac{\mu^2}{L^3} \\ e = \sqrt{1 - \left(\frac{G}{L}\right)^2} & \eta = \sqrt{1 - e^2} = \frac{G}{L} \\ s = \sin i = \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G}\right)^2} & c = \cos i = \frac{H}{G} \end{array} \quad (5.9)$$

Ce jeu de variables  $\Xi$  présente un avantage majeur : il conduit comme nous

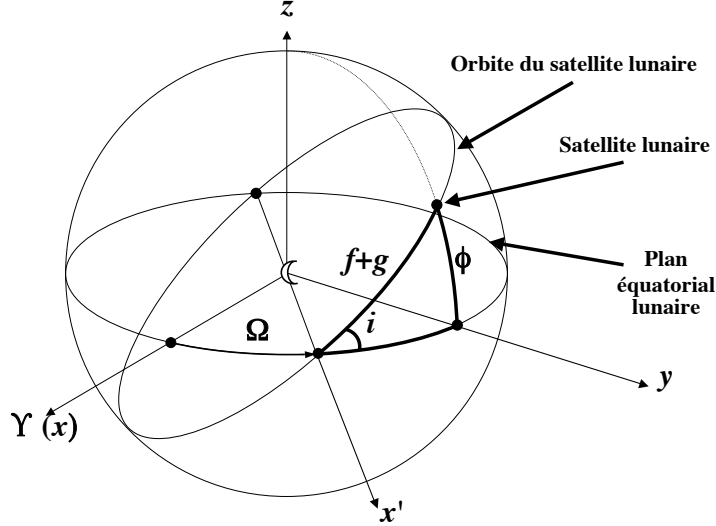


FIG. 5.1 – Le triangle sphérique sur la sphère sélénocentrique.

le souhaitons à des formules sous forme fermée (c'est-à-dire non développée) par rapport à l'excentricité et à l'inclinaison. Par ailleurs, ce jeu de variables est bien complet, puisque les dérivées partielles par rapport aux variables du jeu canonique  $\Lambda$  sont exprimées en fonction d'elles-mêmes ( $\Xi$ ) exclusivement.

Le jeu de variables  $\Xi$  comporte néanmoins deux inconvénients mineurs, qui constituent le prix à payer afin de pouvoir développer une théorie sous forme fermée. Le premier est qu'il est redondant ( $e^2 + \eta^2 = 1; c^2 + s^2 = 1$ ), et le second est qu'il n'est pas canonique : nous devons calculer les dérivées partielles de  $\Xi$  par rapport à  $\Lambda$ , afin de calculer la parenthèse de Poisson qui apparaît dans la formule récursive (3.15) du triangle de Lie.

Le calcul des dérivées partielles  $\partial\Xi/\partial\Lambda$  requiert un peu d'application et quelques astuces classiques, comme l'usage de l'équation de Kepler qui lie les anomalies  $l$  et  $u$ , mais ce n'est pas une tâche trop ardue. Les calculs complets sont présentés à l'Annexe B tandis que nous ne reprenons ici que le résultat final au Tableau 5.1. Nous avons alors par exemple :

$$\frac{dA}{dl} = \frac{\partial A}{\partial l} + \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial l} + \frac{\partial A}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial A}{\partial l} + \frac{\partial A}{\partial \xi} \left( \frac{-\xi^2 e \sin f}{\eta} \right) + \frac{\partial A}{\partial f} (\xi^2 \eta) \quad (5.10)$$

On pourrait penser que la complexité (5.10) introduite par ces dérivées partielles est très pénalisante puisqu'il y a beaucoup de produits à effectuer. Cela ne fait toutefois qu'augmenter le nombre de termes à traiter (un ordre de grandeur de la taille des calculs est donné aux paragraphes suivants), mais n'introduit pas de problème additionnel pour la moyennisation en elle-même. En fait, dans toutes les dérivées,  $\xi$  n'apparaît qu'au numérateur, de sorte que le seul problème qui pourrait être critique du point de vue de l'intégration est d'avoir  $\xi^1$  ou  $\xi^0$  dans la forme finale (puisque l'on doit ensuite diviser les termes par  $\xi^2$  afin de transformer l'intégration sur  $l$  en une intégration sur  $f$ , voir §5.3).

	$\xi$	$f$	$u$	$a$	$n$	$s$	$c$	$e$	$\eta$
$\partial/\partial L$	$\frac{\xi^2 \eta^2}{na^2 e} \cos f$	$\frac{1+\xi \eta^2}{na^2 e} \sin f$	$\frac{\eta}{na^2 e} \sin f$	$\frac{2}{an}$	$-\frac{3}{a^2}$	0	0	$\frac{\eta^2}{na^2 e}$	$-\frac{\eta}{na^2}$
$\partial/\partial G$	$-\frac{\xi^2 \eta}{na^2 e} \cos f$	$-\frac{1+\xi \eta^2}{na^2 e \eta} \sin f$	$-\frac{1}{na^2 e} \sin f$	0	0	$\frac{c^2}{na^2 \eta s}$	$-\frac{c}{na^2 \eta}$	$-\frac{\eta}{na^2 e}$	$\frac{1}{na^2}$
$\partial/\partial H$	0	0	0	0	0	$-\frac{c}{na^2 \eta s}$	$\frac{1}{na^2 \eta}$	0	0
$\partial/\partial l$	$-\frac{\xi^2 e}{\eta} \sin f$	$\xi^2 \eta$	$\xi$	0	0	0	0	0	0

Tab. 5.1 – Dérivées partielles  $\partial\Xi/\partial\Lambda$ .

En utilisant ce nouveau jeu  $\Xi$  de variables (5.8), le facteur  $(\mu r^{-3})$  s'écrit simplement  $\xi^3 n^2$ , et la perturbation  $\mathcal{H}_1^\epsilon$  peut donc être réécrite sous la forme finale compacte suivante :

$$\mathcal{H}_1^\epsilon = \frac{\xi^3 n^2}{4} (1 - 3c^2 - 3s^2 \cos(2f + 2g)) \quad (5.11)$$

avec son équivalent dans l'outil de calcul symbolique MM, qui est donné à la Table 5.2.

	$f$	$g$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	Coefficient
cos	0	0	3	0	2	0	0	0	0	0	$0.2500000000000000D+00$
cos	0	0	3	0	2	0	0	2	0	0	$-0.7500000000000000D+00$
cos	2	2	3	0	2	0	0	0	2	0	$-0.7500000000000000D+00$

TAB. 5.2 – La perturbation initiale  $\mathcal{H}_1^\epsilon$ .

Nous appliquons à présent la Transformée de Lie. L'algorithme de Lie consiste à imposer la forme du nouvel Hamiltonien ; ici on choisit de le prendre indépendant de l'angle rapide  $l$ . Nous avons donc, au premier ordre :

$$\mathcal{H}_0^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_1^{(0)} dl = \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \quad (5.12)$$

où nous écrivons  $\mathcal{H}_0^{(1)}$  sous la forme  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}$  afin de nous rappeler que  $l$  a été éliminé. Ensuite nous utilisons la relation  $\mathcal{H}_0^{(1)} = \mathcal{H}_1^{(0)} + \left(\mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_1\right)$  afin de calculer le générateur  $\mathcal{W}_1$ .  $\mathcal{H}_0^{(0)}$  étant une fonction de  $L$  seulement, la parenthèse de Poisson se réduit à un seul terme, ce qui donne :

$$\mathcal{W}_1 = \frac{1}{n} \int_0^l \left( \mathcal{H}_1^{(0)} - \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \right) dl \quad (5.13)$$

De même, pour le second ordre, nous utilisons la relation :

$$\mathcal{H}_0^{(2)} = \left( \mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_0^{(1)}; \mathcal{W}_1 \right) + \left( \mathcal{H}_0^{(0)}; \mathcal{W}_2 \right) \quad (5.14)$$

où nous faisons de nouveau le choix suivant :

$$\mathcal{H}_0^{(2)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_0^{(1)}; \mathcal{W}_1 \right) dl = \bar{\mathcal{H}}_0^{(2)} \quad (5.15)$$

et nous utilisons finalement la relation (5.14) afin de calculer le générateur  $\mathcal{W}_2$  :

$$\mathcal{W}_2 = \frac{1}{n} \int_0^l \left( \left( \mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_0^{(1)}; \mathcal{W}_1 \right) - \bar{\mathcal{H}}_0^{(2)} \right) dl \quad (5.16)$$

Remarquons que la variable  $h$  n'apparaît nulle part, à cause de la symétrie de

révolution des problèmes zonaux.

## 5.2 Résultats

Notons que nous gardons le plus longtemps possible la variable  $\xi$  sous forme non développée de façon à garder une forme compacte pour les séries. Lors de l'intégration des expressions par rapport à  $l$ , on divise simplement par  $\xi^2\eta$  (puisque  $dl = df/(\xi^2\eta)$ ) afin d'intégrer par rapport à  $f$  au lieu de  $l$ , et on replace seulement alors  $\xi$  par son expression  $\xi(f)$  définie en (5.9).

Le résultat du calcul (5.12) de l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre  $\bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}$  et du générateur correspondant  $\mathcal{W}_1^\epsilon$  (5.13) est :

$$\bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)} = \frac{n^2}{4\eta^3}(1 - 3c^2) \quad (5.17)$$

$$\mathcal{W}_1^\epsilon = \frac{n}{8\eta^3} \left[ 2(1 - 3c^2)\phi + 2e(1 - 3c^2)\sin(f) - 3es^2\sin(f + 2g) - 3s^2\sin(2f + 2g) - es^2\sin(3f + 2g) \right] \quad (5.18)$$

où  $\phi = f - l$ . On s'attendait bien à la forme (5.17) pour  $\bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}$  : en considérant (5.11) et en remarquant que la partie constante de  $\xi^3$ , après division par  $\xi^2\eta$  est  $\eta^{-3}$ .

On retrouve des résultats connus du premier ordre ( $\bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}$  et  $\mathcal{W}_1^\epsilon$ ) pour l'effet de  $J_2$  (voir §5.6). De plus, quand on réexprime l'Hamiltonien moyennisé comme étant

$$\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}(\bar{L}) + \epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}(\bar{L}, \bar{G}, \bar{H}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.19)$$

on peut en déduire les équations du mouvement moyennisées au premier ordre,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{l}} &= \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}}{\partial \bar{L}} + \epsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}}{\partial \bar{L}} & \dot{\bar{L}} &= 0 \\ \dot{\bar{g}} &= 0 + \epsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}}{\partial \bar{G}} & \dot{\bar{G}} &= 0 \\ \dot{\bar{h}} &= 0 + \epsilon \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)}}{\partial \bar{H}} & \dot{\bar{H}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

qui peuvent s'écrire sous une forme plus coutumière en éléments kepleriens :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{l}} &= \bar{n} + \epsilon \left[ -\frac{3}{4} \frac{\bar{n}}{\bar{a}^2(1 - \bar{e}^2)^2} \right] \sqrt{1 - \bar{e}^2} (1 - 3 \cos^2 \bar{i}) \\ \dot{\bar{g}} &= \epsilon \left[ -\frac{3}{4} \frac{\bar{n}}{\bar{a}^2(1 - \bar{e}^2)^2} \right] (1 - 5 \cos^2 \bar{i}) \\ \dot{\bar{h}} &= \epsilon \left[ -\frac{3}{4} \frac{\bar{n}}{\bar{a}^2(1 - \bar{e}^2)^2} \right] (2 \cos^2 \bar{i}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

avec  $(\bar{L}, \bar{G}, \bar{H})$  tous constants. Les deux formules qui donnent l'effet de  $J_2$  sur  $g$  et  $h$  sont assez répandues et peuvent être trouvées p.ex. dans [Szebehely, 1989, p. 129], [Roy, 1968, p. 89] et [Jupp, 1988, p. 128]. La valeur particulière de l'inclination qui annule  $\dot{\bar{g}}$ , connu sous le nom d'*inclination critique*  $I_c = 63^\circ 26'$ , est aussi relativement célèbre [Szebehely, 1989, p. 130] et a même donné lieu à une certaine controverse par le passé [Jupp, 1988]. Ces deux formules peuvent aussi se déduire des fameuses équations planétaires de Lagrange ([Cook, 1988, p. 56], [Kaula, 1966, p. 29]).

Le résultat du calcul de l'Hamiltonien moyennisé au second ordre, en  $\epsilon^2$ , est :  
 $\bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\epsilon}^{(2)} \times \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = 5(s^4 - 8c^4) - 4\eta(1 - 3c^2)^2 - \eta^2(5s^4 - 8c^2) - 2e^2s^2(1 - 15c^2) \cos(2g)$  (5.22)  
 où la série a été multipliée par un facteur

$$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \frac{64a^2\eta^7}{3n^2} \quad (5.23)$$

afin de rendre le résultat le plus lisible possible (tous les coefficients deviennent alors des entiers). En fait, la série originale contenait 41 termes, qui se réduisent à 10 seulement après simplifications (voir Table 5.5). Une fois de plus, nous retrouvons les résultats connus  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)}$  pour l'effet du second ordre en  $J_2$  (voir §5.7).

Le résultat pour le générateur du second ordre  $\mathcal{W}_2$  calculé en (5.16) est donné à la Table C.1 de l'Annexe C, où la série a été multipliée par un facteur

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}} = \frac{4096a^2\eta^9}{n} \quad (5.24)$$

de façon à rendre à nouveau le résultat plus lisible (avec des coefficients entiers). En fait, la série originale contenait 241 termes, qui se sont réduits à 94 termes après simplifications (voir Table 5.5). On pourrait essayer d'effectuer encore davantage de simplifications, mais d'une part cela ne réduirait plus de façon drastique le nombre de termes, et d'autre part cela impliquerait l'introduction d'autres variables. Nous avons donc choisi d'arrêter la réduction à ce stade. Par exemple, on pourrait faire apparaître le facteur

$$\alpha^* \equiv 1 - \eta \quad (5.25)$$

ce qui réduirait le nombre de termes à  $\approx 19$ . Soulignons le fait que ce facteur  $\alpha^*$  joue aussi symboliquement un autre rôle important : cela relègue le facteur  $1/e$  apparaissant dans  $\sin(f)$ ,  $\sin(f + 2g)$  et  $\sin(3f + 2g)$  au rang de singularité virtuelle. En effet,  $\alpha^*$  est de l'ordre de  $e^2$ , comme on peut le vérifier en développant  $\alpha^* \equiv 1 - \sqrt{1 - e^2}$  en série de  $e$ . On pouvait s'y attendre, puisque la perturbation originale  $\mathcal{H}_1^{(0)}$  vérifie la caractéristique de d'Alembert<sup>2</sup>, propriété qui est préservée par les parenthèses de Poisson [Deprit and Rom, 1970]. Notons aussi que seuls les puissances paires de  $c$  et  $s$  sont présentes.

Avant d'aborder la question de savoir si ces résultats  $(\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}, \mathcal{W}_1, \bar{\mathcal{H}}_0^{(2)}, \mathcal{W}_2)$  sont équivalents à d'autres publiés, nous donnons ci-après des détails au sujet de la façon d'effectuer les intégrations (§5.3) et nous soulignons quelques problèmes de simplifications (§5.4).

### 5.3 Astuces pour l'intégration

Nous discutons ici brièvement la manière d'intégrer chaque type de terme d'une série typique. Soit  $\mathcal{B}$  cette série, correspondant ici soit à  $\mathcal{H}_1^{(0)}$  (5.12) lors du calcul du premier ordre, soit à  $(\mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_0^{(1)}; \mathcal{W}_1)$  (5.15) lors du calcul du second ordre. Nous devons mettre dans  $\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}$  la partie constante de  $\mathcal{B}$ , et dans  $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$  le générateur périodique :

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{B} \, dl \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{n} \int_0^l (\mathcal{B} - \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}) \, dl$$

<sup>2</sup>La caractéristique de d'Alembert est le fait que l'exposant minimum de  $e$  apparaissant en facteur d'une expression du type  $e^i \sin(il)$  est précisément  $i$ , et progresse ensuite par  $e^2$  — voir par exemple [Brouwer and Clemence, 1961, p. 79].

L'intégration doit être faite par rapport à  $l$ , tandis que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(f, \xi(f), \phi)$ . Il est bien connu que le facteur  $\phi = (f - l)$  joue un rôle important dans le problème du satellite artificiel (voir [Aksnes, 1971], [Deprit and Rom, 1970] ou [Métris, 1991]). La relation

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \xi^2 \eta \quad (5.26)$$

donnée à la Table 5.1 joue aussi un rôle important, puisqu'elle nous permet de transformer l'intégration en  $l$  en une intégration en  $f$ .

Pratiquement, nous effectuons l'intégration par étapes successives, chaque type de terme étant intégré dans une routine séparée, de complexité croissante.

- Considérons tout d'abord les termes du genre  $\mathcal{B} = X(f) \xi^{\geq 2} \phi^0$ . On peut aisément les diviser par  $\xi^2 \eta$ , et ensuite développer en  $f$  (avec  $\xi = \xi(f)$ ), et finalement séparer en 2 parties :

$$\frac{\mathcal{B}}{\xi^2 \eta} = \bar{\mathcal{B}} + \tilde{\mathcal{B}}$$

$\tilde{\mathcal{B}}$  contenant la partie périodique en  $f$ , et  $\bar{\mathcal{B}}$  la partie constante. Nous pouvons donc intégrer directement par rapport à  $f$  :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{B} \, dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\bar{\mathcal{B}} + \tilde{\mathcal{B}}) \, df = \bar{\mathcal{B}} \\ \mathcal{W}_{\mathcal{B}} &= \frac{1}{n} \int_0^l (\mathcal{B} - \bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}) \, dl = \frac{1}{n} \int_0^f (\bar{\mathcal{B}} + \tilde{\mathcal{B}}) \, df - \frac{1}{n} \int_0^l \bar{\mathcal{B}} \, dl \\ &= \frac{1}{n} \int_0^f \tilde{\mathcal{B}} \, df + \frac{1}{n} \bar{\mathcal{B}} \phi \end{aligned}$$

Ces termes apparaissent le plus souvent lors du calcul de :

$$(\mathcal{H}_1^{(0)} + \mathcal{H}_0^{(1)}; \mathcal{W}_1) \quad (5.27)$$

Un problème critique lors de tels calculs est le nombre de termes apparaissant dans les séries (typiquement des centaines de termes ici) ; qui est lié principalement à la plus haute puissance de  $\xi$  et au plus grand coefficient de  $f$ . La Table 5.3 donne le nombre de termes apparaissant après le développement de  $\xi = \xi(f)$  pour chaque puissance de  $\xi$  ; les termes en  $\xi^0$  sont traités plus loin.

Nombre de termes	
$\xi^6$	141
$\xi^5$	177
$\xi^4$	185
$\xi^3$	78
$\xi^2$	12
$\xi^0$	3
Total	< 1000

TAB. 5.3 – Nombre de termes apparaissant lors du calcul du second ordre (5.27).

- Considérons à présent les termes du genre  $\mathcal{B} = X(f) \xi^{\geq 2} \phi^1$ . On peut également diviser par  $\xi^2 \eta$  et développer en  $f$  (avec  $\xi = \xi(f)$ ), et séparer en 2 parties :

$$\frac{\mathcal{B}}{\xi^2 \eta} = \bar{\mathcal{B}} \phi + \tilde{\mathcal{B}} \phi$$

$\tilde{\mathcal{B}}$  contenant la partie périodique en  $f$  (en plus du facteur  $\phi$ ), et  $\bar{\mathcal{B}}$  le reste. Il se fait que dans notre cas  $\bar{\mathcal{B}} = 0$ , de sorte que nous ne considérons que l'intégration de  $\tilde{\mathcal{B}}\phi$  par rapport à  $f$ , ce qui peut se faire par parties, comme suggéré par [Aksnes, 1971] :

$$\int \tilde{\mathcal{B}}\phi \, df = I_{\tilde{\mathcal{B}}}\phi - \int I_{\tilde{\mathcal{B}}} \left(1 - \frac{\partial l}{\partial f}\right) df = I_{\tilde{\mathcal{B}}}\phi - \int I_{\tilde{\mathcal{B}}} df + \int I_{\tilde{\mathcal{B}}} dl \quad (5.28)$$

$I_{\tilde{\mathcal{B}}}$  étant la primitive de  $\tilde{\mathcal{B}}$  par rapport à  $f$ . Les 2 premiers termes du membre de droite de (5.28) vont dans  $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$  puisqu'ils sont périodiques en  $f$ , et le dernier ( $I_{\tilde{\mathcal{B}}}$ ) doit encore être intégré par rapport à  $l$ . Il se fait que certains de ces termes s'éliminent l'un l'autre, de sorte que certaines intégrations peuvent être évitées ; cela vaut donc la peine d'effectuer la séquence des étapes d'intégration dans le bon ordre [Aksnes, 1971].

Notons à propos que nous trouvons le même terme à intégrer que l'équation (5) de [Aksnes, 1971] :

$$\int \frac{\partial F_1^*}{\partial G} \frac{\partial W_1^{Aksnes}}{\partial g} dt = \frac{\epsilon^2}{n} \int \frac{\partial H_0^{(1)}}{\partial G} \frac{\partial W_1}{\partial g} dl \quad (5.29)$$

calculé soit à la main ou via le MM, en prenant en compte la relation entre les variables de Aksnes et les nôtres. Nous retrouvons ses résultats du premier ordre, le lien étant donné par :

$$F_1 = -\epsilon H_1^{(0)} \quad F_1^* = -\epsilon H_0^{(1)} \quad W_1^{Aksnes} = -\epsilon W_1$$

avec les définitions (5.34). Notons que le signe moins vient du fait de la convention inverse pour les équations du mouvement ( $\Delta_1 = -1$ , voir §5.5).

Nous avons également trouvé le même terme à intégrer que l'équation (6) de [Aksnes, 1971], pour la partie contenant le facteur  $\phi$  :

$$-\int \frac{\partial F_1}{\partial g} \frac{\partial W_1^{Aksnes}}{\partial G} dt = -\frac{\epsilon^2}{n} \int \frac{\partial H_1^{(0)}}{\partial g} \frac{\partial W_1}{\partial G} dl \quad (5.30)$$

et nous avons également les mêmes résultats pour son intégration par parties.

- Considérons finalement les termes du genre  $\mathcal{B} = k \xi^0 \phi^0 = \bar{\mathcal{B}}$ . Il n'est pas nécessaire de les diviser par  $\xi^2 \eta$  comme précédemment, car ils peuvent être intégrés directement par rapport à  $l$  :

$$\bar{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{B} \, dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{\mathcal{B}} \, dl = \bar{\mathcal{B}} \quad (5.31)$$

et rien n'est mis dans  $\mathcal{W}_{\mathcal{B}}$ . Notons que nous avons par la même occasion un beau résultat d'intégration :

$$\int_0^{2\pi} dl = 2\pi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\xi^2 \eta} df = \int_0^{2\pi} \frac{\eta^3}{(1 + e \cos f)^2} df$$

où  $\eta = \sqrt{1 - e^2}$ .

Ces termes sont les termes de degré le plus bas qui apparaissent lors du calcul de (5.27) ; il y en a seulement 3 (voir Table 5.3), qui sont donnés à la Table 5.4.

$f$	$g$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	Coefficient
cos	0	0	-2	2	0	-6	0	0	0	$-0.1875000000000000D + 00$
cos	0	0	0	-2	2	0	-6	2	0	$0.1125000000000000D + 01$
cos	0	0	0	-2	2	0	-6	4	0	$-0.1687500000000000D + 01$

TAB. 5.4 – Termes du genre  $k \xi^0 \phi^0$  apparaissant lors du calcul de (5.27).



## 5.4 Quelques problèmes de simplifications

Quelques mots à propos des problèmes de simplifications que nous avons rencontrés jusqu'à présent. La simplification est un des problèmes les plus complexes, et constitue un vrai challenge pour les calculs symboliques. Il n'est pas toujours facile de reconnaître au premier coup d'oeil qu'une expression polynomiale peut être simplifiée d'une façon ou d'une autre. C'est d'autant plus vrai quand le résultat n'est pas donné sous une forme analytique exacte mais est entaché en quelque sorte par les erreurs numériques.

La raison pour laquelle nous nous soucions particulièrement des simplifications, est que nous voulons garder le nombre de termes à un niveau raisonnable, sans quoi il pourrait grimper exponentiellement, surtout lors du calcul de la parenthèse de Poisson. Dans le résultat en lui-même, il y a la partie non réductible, qui est la "forme la plus compacte", et une partie réductible, que nous devrions faire disparaître. Cette partie réductible ne s'élimine pas automatiquement pour plusieurs raisons, parmi lesquelles :

1. l'ordinateur ne connaît pas les différentes redondances dans notre jeu de variables (5.9),
2. l'ordinateur génère des erreurs d'arrondi,
3. l'ordinateur n'est pas capable de reconnaître un facteur polynomial inconnu dans un polynôme.

Nous pouvons déjà considérer et résoudre les deux premiers problèmes, tandis que le dernier est laissé à la perspicacité de l'utilisateur pour l'instant.

1. Le premier problème est lié aux différentes redondances dans notre jeu de variables (5.9) :

$$e \leftrightarrow \eta \quad \text{puisque} \quad \eta^2 + e^2 = 1 \quad \text{et} \quad c \leftrightarrow s \quad \text{puisque} \quad c^2 + s^2 = 1$$

ce qui implique que nous avons différentes formes équivalentes pour une même expression, avec deux conséquences principales : certaines simplifications ne peuvent pas toujours apparaître au premier coup d'oeil, et la comparaison des résultats n'est pas toujours directe.

De façon à éviter ces inconvénients, nous pouvons choisir d'exprimer les résultats uniquement dans les variables  $(e, c)$  plutôt que  $(\eta, s)$ , en effectuant une opération *substitute*. Par exemple, dans le calcul de (5.15), le simple fait de multiplier la série initiale brute par  $\eta^9$  (le dénominateur commun) et d'ensuite effectuer une opération *substitute* réduit le nombre de termes de moitié. Parmi ces simplifications, il y a des séries du genre

$$\left( \frac{e^2}{\eta^7} - \frac{e^2}{\eta^9} + \frac{e^4}{\eta^9} \right) \quad (5.32)$$

qui ne s'éliminent pas initialement, bien qu'étant strictement égales à zéro. Une de ces séries est celle en  $\cos(4g)$ , qui s'élimine finalement, comme mentionné également dans [Brouwer, 1959, p. 385].

Une fois que l'on estime que les simplifications sont arrivées à un stade ultime, nous pouvons aller dans le sens opposé, par exemple en cherchant des facteurs comme  $(1 - e^2)$  ou  $(1 - c^2)$ , et les compacter en  $\eta^2$  et  $s^2$  respectivement. Nous appellerons cette opération de compactage une opération *collect*. Nous savons qu'en faisant cela, nous avons réintroduit une redondance des variables, mais nous le faisons sciemment à des fins de compactage après avoir effectué toutes les simplifications possibles.

Nous pensons que nous sommes ainsi très proches de la forme la plus compacte du résultat à ce stade. C'est à présent à l'utilisateur de trouver de nouveaux facteurs, de nouvelles combinaisons de variables, de compacter davantage les expressions, mais ce n'est pas vraiment la peine d'introduire à nouveau d'autres variables. Bien sûr, il n'est plus nécessaire d'effectuer à nouveau une opération *substitute*. Comme illustration, nous donnons à la Table 5.5 le nombre de termes à différents stades de la procédure de simplification, à la fois pour  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)}$  et  $\mathcal{W}_2$ . Nous voyons que les deux opérations *substitute* et *collect* sont efficaces, réduisant le nombre de termes d'un facteur d'environ 2.5–4. Pour l'instant, l'opération *substitute* est récursive, tandis que l'opération *collect* doit être répétée à volonté. Il n'est pas toujours aisé de savoir quelle variable collecter en premier ; de sorte que la forme finale peut également différer d'aspect. Ce travail de simplification est bien sûr d'autant plus important que l'ordre des calculs est élevé. La séquence (*substitute* /  $\eta^2$ –*collect* /  $s^2$ –*collect* /  $s^2$ –*collect*) est optimale pour la réduction du nombre de termes. Cette *séquence typique de simplification* a aussi été utilisée chaque fois que nous voulions simplifier et compacter une série.

	$\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)}$	$\mathcal{W}_2$
initialement	41	241
multiplication par un facteur	$\mathcal{F}_1 = \frac{64a^2\eta^9}{3n^2}$	$\mathcal{F}_3 = \frac{4096a^2\eta^9}{n}$
après une opération <i>substitute</i> <sup>a</sup>	20	199
après une opération $\eta^2$ – <i>collect</i> <sup>b</sup>	11	130
après une opération $s^2$ – <i>collect</i> <sup>c</sup>	10	100
après une seconde opération $s^2$ – <i>collect</i>	10	94
multiplication par un facteur	$\mathcal{F}_2 = \eta^{-2}$	1
facteur final appliqué	$\mathcal{F}_{\mathcal{H}} = \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ $= \frac{64a^2\eta^7}{3n^2}$	$\mathcal{F}_{\mathcal{W}} = \mathcal{F}_3$
nombre final de termes	10	94
<sup>a</sup> l'opération <i>substitute</i> effectuée récursivement : $\eta^2 \rightarrow (1 - e^2)$ et $s^2 \rightarrow (1 - c^2)$		
<sup>b</sup> l'opération $\eta^2$ – <i>collect</i> effectuée une fois : $(1 - e^2) \rightarrow \eta^2$		
<sup>c</sup> l'opération $s^2$ – <i>collect</i> effectuée une fois : $(1 - c^2) \rightarrow s^2$		

TAB. 5.5 – Nombre de termes à différents stades de la procédure de simplification.

2. A présent nous considérons le second problème qui gêne les simplifications, c'est-à-dire les erreurs d'arrondi inhérentes à l'ordinateur. Nous travaillons avec des réels double précision pour les coefficients, ce qui signifie une précision numérique de  $10^{-16}$ . D'où quelquefois, des termes ne disparaissent pas car leur coefficient n'est pas exactement 0, mais bien  $O(10^{-16})$ . Nous effectuons dès lors une opération de *cutting off* de façon à détruire les termes dont le coefficient est inférieur en valeur absolue à, disons,  $10^{-15}$ . C'est particulièrement significatif pour des calculs plus conséquents, et aussi si nous multiplions par des facteurs plus grands. C'est précisément le cas pour  $\mathcal{W}_2$ , qui comprend des centaines de termes dans le calcul et que nous avons multiplié par 4096 afin de rendre les coefficients entiers. Parmi les 199 termes qui apparaissent après l'opération *substitute* (voir Table 5.5), 6 d'entre eux ont un coefficient *quasi* nul, c'est-à-dire  $O(4096 \times 10^{-15})$ . Nous devons donc les supprimer par un *cutting off* à  $10^{-11}$ . Il nous reste alors 193 termes.

Certains de ces 193 termes ont aussi des coefficients presque entiers ; ils peuvent être arrondis par une opération *cleaning*, à  $10^{-11}$ . Attention au fait que le format d'affichage décimal ne représente pas toujours exactement la valeur interne du coefficient ; de sorte que les coefficients peuvent sembler entiers à l'affichage, tandis qu'ils sont *presque* entiers de façon interne. On aboutit alors à des termes "nettoyés", à partir desquels on peut poursuivre les opérations *collect* plus efficacement.

En conclusion pour cette section, on peut dire que nous sommes en mesure de contrebalancer les erreurs d'arrondi grâce aux opérations *cutting off* et *cleaning*, et que notre *séquence typique de simplification* est optimale pour compacter les séries. Bien sûr, lors du calculs d'ordres supérieurs, les erreurs d'arrondi pourraient devenir difficilement distinguables du résultat réel : un certain doigté est ici nécessaire à l'utilisateur. Un calcul complètement symbolique (avec coefficients sous forme de fractions) serait toutefois une solution ; c'est une extension que nous avons développée et que nous présentons brièvement à l'Annexe I.

Nous décrivons ensuite en détails le lien entre les différentes écoles et conventions ; c'est nécessaire afin de comparer des résultats hétérogènes.

## 5.5 Equivalence entre Théories de Perturbation

Il y a 2 écoles pour la forme des équations d'Hamilton, en fonction du signe qui est choisi devant le gradient du potentiel dans les équation du mouvement. Nous donnons un aperçu de ces 2 écoles à la Table 5.6. En conclusion, la différence entre ces 2 écoles est que les potentiels et Hamiltoniens sont opposés ; un signe moins est donc introduit aussi dans les équations du mouvement (du second ordre ou les équations d'Hamilton du premier ordre). Dans la suite, nous utiliserons le symbole  $\Delta_1$  au lieu de  $-1$  lorsque nous voudrions bien mettre en évidence le fait qu'un signe moins vient de cette différence d'écoles. Par exemple, on écrira :

$$F = \Delta_1 \times \mathcal{H} = -\mathcal{H} \quad (5.33)$$

Ensuite il y a 2 écoles principales pour la Méthode des Perturbations hamiltoniennes. L'une est celle qui correspond à la méthode de von Zeipel's, l'autre à la méthode des Transformées de Lie. Nous avons déjà présenté notre travail dans le cadre de la seconde méthode, avec les développements (3.23) en  $\epsilon$ . La première méthode a été utilisée par [Brouwer, 1959], [Kozai, 1962b] et [Aksnes, 1971]. Ils suivent tous la même convention : le paramètre de perturbation est  $k_2$  (avec  $2k_2 = \epsilon$ ), ce qui donne les développements suivants pour l'Hamiltonien initial  $F$ , la fonction génératrice  $S$  et l'Hamiltonien moyennisé  $F^*$  (l'indice représente l'exposant de  $k_2$  présent dans le terme) :

$$\begin{array}{lll} F & = & F_0 + F_1 \\ & = & F_0 + k_2 \tilde{F}_1 \\ S & = & S_0 + S_1 + S_2 \\ & = & S_0 + k_2 \tilde{S}_1 + k_2^2 \tilde{S}_2 \\ F^* & = & F_0^* + F_1^* + F_2^* \\ & = & F_0^* + k_2 \tilde{F}_1^* + k_2^2 \tilde{F}_2^* \end{array} \quad (5.34)$$

Il existe bien entendu plusieurs formes équivalentes en fonction de la façon dont le développement dans le paramètre de perturbation est faite : le paramètre peut être défini de façon différente (comme  $k_2$  et  $\epsilon$ , avec  $2k_2 = \epsilon$ ), il peut être inclus dans la variable Hamiltonienne ou pas (comme  $F_1$  et  $\epsilon \mathcal{H}_1^{(0)}$ ), et finalement il peut contenir une factorielle ou pas dans le développement (comme  $k_2^2 \tilde{F}_2^*$  et  $\frac{\epsilon^2 \mathcal{H}_0^{(2)}}{2!}$ ).

	convention de [Brouwer, 1959] <sup>a</sup>	convention de cette thèse <sup>b</sup>
Equations du mouvement Potentiel <sup>c</sup> (central & $J_2$ )	$\ddot{\vec{x}} = \vec{\nabla}U$ $U = \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r^3}k_2(1 - 3\sin^2\beta)$	$\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla}V$ $V = -\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r^3}\frac{\epsilon}{2}(1 - 3\sin^2\phi)$
Hamiltonien initial <sup>d</sup>	$F = +\frac{\mu^2}{2L^2} + k_2\left(\frac{a}{r}\right)^3\frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{L^3}\right)^2 \times$ $\left[3\left(1 - \frac{H^2}{G^2}\right)\cos(2f + 2g) - \left(1 - 3\frac{H^2}{G^2}\right)\right]$	$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - \frac{\epsilon}{2}\frac{\xi^3 n^2}{2} \times$ $[3s^2\cos(2f + 2g) - (1 - 3c^2)]$
Equations d'Hamilton dans les variables de Delaunay	$\dot{l} = -\frac{\partial F}{\partial L} \quad \dot{L} = +\frac{\partial F}{\partial l}$ $\dot{g} = -\frac{\partial F}{\partial G} \quad \dot{G} = +\frac{\partial F}{\partial g}$ $\dot{h} = -\frac{\partial F}{\partial H} \quad \dot{H} = +\frac{\partial F}{\partial h}$	$\dot{l} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} \quad \dot{L} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial l}$ $\dot{g} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} \quad \dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}$ $\dot{h} = +\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} \quad \dot{H} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h}$
<sup>a</sup> [Kozai, 1962b] et [Aksnes, 1971] suivent la même convention que [Brouwer, 1959].		
<sup>b</sup> notre convention est celle de la Mécanique Classique. Voir par exemple les pages 15–16 du Chapitre <i>Fundamentals of Newtonian Mechanics</i> de [Meirovitch, 1970].		
<sup>c</sup> les potentiels sont opposés ( $U = -V$ ), avec $\phi = \beta$ et $\epsilon = 2k_2 = J_2R^2$ .		
<sup>d</sup> les Hamiltoniens sont opposés ( $F = -\mathcal{H}$ ), avec $\frac{\mu^2}{L^3} = n$ , $\frac{a}{r} = \xi$ , $\frac{H}{G} = c$ et $(1 - \frac{H^2}{G^2}) = s$ .		

TAB. 5.6 – Les 2 écoles pour la forme des équations d'Hamilton.

En conclusion, la différence entre ces 2 écoles est qu'il y a un facteur supplémentaire entre les Hamiltoniens, qui provient de développements différents ((3.23) et (5.34)) de la perturbation dans des paramètres différents. Ce facteur ne dépend que de l'ordre  $n$ , et sera rappelé par le symbole suivant :

$$\Delta_2(n) = \frac{2^n}{n!} \quad (5.35)$$

Dans la suite, nous noterons donc l'équivalence d'ordre  $n$  sous la forme :

$$\frac{F_n^*}{k_2^n} = \Delta_1 \times \Delta_2(n) \times \bar{\mathcal{H}}_0^{(n)} = -\frac{2^n}{n!} \bar{\mathcal{H}}_0^{(n)} \quad (5.36)$$

Par contre, il faut faire attention au fait que pour les générateurs, la différence est plus fondamentale qu'un simple facteur du genre (5.36) : l'équivalence entre la méthode de von Zeipel's et les Transformées de Lie a été donnée par [Shniad, 1970], et illustrée dans une autre version aussi dans [p. 139][Boccaletti and Pucacco, 1999]. Nous rappelons ici brièvement le théorème de Shniad qui donne la relation entre les générateurs, à partir duquel on peut déterminer l'équivalence.

*La transformation de phase de type von Zeipel générée par la fonction  $S = S(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, \epsilon)$  est la même que la Transformée de Lie basée sur le générateur  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)$  si et seulement si*

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) \quad \text{et} \quad \frac{\partial S(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, \epsilon)}{\partial \epsilon}$$

*sont des fonctions équivalentes. Cette équivalence est une identité dans les variables  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)$  :*

$$\mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon) = \left[ \frac{\partial S(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, \epsilon)}{\partial \epsilon} \right]_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)},$$

*où l'évaluation de  $\mathbf{Q}$  est obtenue de l'inversion de la relation*

$$\mathbf{q} = \frac{\partial S(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, \epsilon)}{\partial \mathbf{p}}.$$

*Ce mapping des fonctions  $S = S(\mathbf{Q}, \mathbf{p}, \epsilon)$  vers les fonctions  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \epsilon)$  est formellement inversible.*

Shniad donne aussi le lien entre les générateurs sous une forme explicite :

$$S_1 = \mathcal{W}_1 \quad (5.37)$$

$$S_2 = \mathcal{W}_2 + \sum_i \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} S_3 = \mathcal{W}_3 + 2 \sum_i \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{W}_2}{\partial p_i} + \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{W}_1}{\partial p_j \partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_j} \\ + \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{W}_1}{\partial p_i \partial q_j} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\partial^2 \mathcal{W}_1}{\partial q_i \partial q_j} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_j} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Notons que les développements sont supposés avoir été faits de la même façon (sinon, un facteur du genre  $\Delta_2(n)$  doit aussi être considéré).

## 5.6 Validation des résultats en $J_2$ : $\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}$ et $\mathcal{W}_1$

Le résultat du premier ordre de Brouwer [Brouwer, 1959] pour l'Hamiltonien moyennisé est (les notations de Brouwer sont rappelées dans (5.34)) :

$$F_1^* = \frac{\mu^4 k_2}{L^3 G^3} A \quad \text{avec} \quad A = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \quad ((13) \text{ de Brouwer})$$

Supprimons tout d'abord la notation 'un peu lourde' dans les résultats de Brouwer, et ensuite établissons la connexion avec nos éléments définis en (5.9) en faisant les substitutions ( $\frac{H}{G} \rightarrow c$ ,  $\frac{\mu^2}{L^3} \rightarrow n$ ,  $\frac{L}{G} \rightarrow \eta^{-1}$ ) ; cela donne :

$$\frac{F_1^*}{k_2} = \left( \frac{\mu^2}{L^3} \right)^2 \left( \frac{L}{G} \right)^3 \frac{1}{2} (3c^2 - 1) = \frac{n^2}{2\eta^3} (3c^2 - 1)$$

Dès lors, vu (5.17), on a la relation suivante :

$$\frac{F_1^*}{k_2} = -2\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} = \Delta_1 \times \Delta_2(1) \times \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} \quad (5.40)$$

qui est en effet le lien détaillé en (5.36).

Le générateur du premier ordre donné par Brouwer est :

$$S_1 = \frac{\mu^2 k_2}{G'^3} \left\{ A(f - l + e \sin f) + B \left[ \frac{1}{2} \sin(2g + 2f) + \frac{e}{2} \sin(2g + f) + \frac{e}{6} \sin(2g + 3f) \right] \right\} \quad ((15) \text{ de Brouwer})$$

En faisant les mêmes substitutions qu'auparavant (et en plus  $B \rightarrow \frac{3}{2}s^2$ , puisque  $B = +\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}$ ), nous trouvons similairement, vu (5.18) :

$$\frac{S_1}{k_2} = -2\mathcal{W}_1 = \Delta_1 \times \Delta_2(1) \times \mathcal{W}_1 \quad (5.41)$$

Considérant les relations (5.40) et (5.41), on constate donc que les résultats du premier ordre de Brouwer sont strictement équivalents aux nôtres.

## 5.7 Validation des résultats en $J_2^2 : \bar{\mathcal{H}}_0^{(2)}$ et $\mathcal{W}_2$

Rappelons tout d'abord que nous avons déjà validé certains résultats intermédiaires du second ordre : ceux de Aksnes (voir §5.3), qui partait du résultat de Brouwer (en écrivant  $J_2 R^2$  pour  $2k_2$  et  $W_1$  comme  $S_1$ ).

Maintenant, pour l'Hamiltonien moyennisé du second ordre, Brouwer donne le résultat suivant :

$$F_2^* = \frac{\mu^6 k_2^2}{L'^{10}} \left\{ \begin{aligned} & \left[ + \frac{15}{32} \frac{L'^5}{G'^5} \left( 1 - \frac{18}{5} \frac{H^2}{G'^2} + \frac{H^4}{G'^4} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{8} \frac{L'^6}{G'^6} \left( 1 - 6 \frac{H^2}{G'^2} + 9 \frac{H^4}{G'^4} \right) - \frac{15}{32} \frac{L'^7}{G'^7} \left( 1 - 2 \frac{H^2}{G'^2} - 7 \frac{H^4}{G'^4} \right) \right] \\ & \quad \left. + \left[ - \frac{3}{16} \left( \frac{L'^5}{G'^5} - \frac{L'^7}{G'^7} \right) \left( 1 - 16 \frac{H^2}{G'^2} + 15 \frac{H^4}{G'^4} \right) \right] \cos(2g') \right\} \quad ((29) \text{ de Brouwer}) \end{aligned}$$

Toujours en faisant les mêmes substitutions qu'auparavant, on aboutit, vu (5.22), à :

$$\frac{F_2^*}{k_2^2} = -2\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)} = \Delta_1 \times \Delta_2(2) \times \bar{\mathcal{H}}_0^{(2)} \quad (5.42)$$

C'est bien le lien détaillé en (5.36), de sorte que l'Hamiltonien moyennisé du second ordre de Brouwer est strictement équivalent au nôtre.

Pour le générateur du second ordre  $\mathcal{W}_2$ , les choses sont plus compliquées, puisque la différence entre les 2 méthodes est plus fondamentale. De plus, puisque Brouwer ne donne pas le générateur du second ordre, nous devons nous référer aux résultats de Kozai, qui a prolongé les résultats de Brouwer. Bien entendu, nous avons tout d'abord vérifié que le  $S_1$  de Kozai, c'est-à-dire l'équation (2.16) de [Kozai, 1962b] correspondait bien à ((13) de Brouwer) ; c'est effectivement le cas, puisque que  $2k_2 = J_2$ . Cette relation vient du fait que Kozai prend comme convention que le rayon équatorial du corps primaire  $R = a_e$  est l'unité de longueur, de sorte que  $2k_2 = \epsilon = J_2 R^2$  devient  $2k_2 = J_2$ .

Nous voulons à présent établir la correspondance exacte, terme à terme, entre notre générateur  $\mathcal{W}_2$  (donné à la Table C.1 de l'Annexe C) et le  $S_2$  de Kozai, donné par l'équation (3.2) de [Kozai, 1962b, p.448], et repris à la Figure C.1 de la même

Annexe. La correspondance entre les générateurs de von Zeipel  $S_i$  et les générateurs de Lie  $\mathcal{W}_i$  a été donnée au §5.5 ; nous rappelons ici seulement le lien pour le second ordre<sup>3</sup>, de laquelle nous allons repartir :

$$S_2 = \mathcal{W}_2 + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} \quad (5.38)$$

Ainsi, notre  $\mathcal{W}_2$  doit être augmenté d'une quantité  $\Delta$ , qui ressemble fortement à une "demi auto-parenthèse de Poisson" :

$$\Delta = + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} \quad (5.43)$$

Comme nous avons choisi la convention opposée pour les signes, alors les potentiels, Hamiltoniens et fonctions génératrices sont opposés (voir §5.5). De plus, un facteur  $\Delta_2(2)$  doit être appliqué de façon à tenir compte de la relation  $2k_2 = \epsilon$ , de sorte que nous transposons (5.38) en :

$$\frac{S_2}{k_2^2} = \left( \Delta_1 \mathcal{W}_2 + \frac{\partial(\Delta_1 \mathcal{W}_1)}{\partial p_i} \frac{\partial(\Delta_1 \mathcal{W}_1)}{\partial q_i} \right) \times \Delta_2(2) = 2 \left( -\mathcal{W}_2 + \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{W}_1}{\partial q_i} \right) \quad (5.44)$$

En y substituant finalement  $k_2$  by  $J_2/2$ , on obtient finalement :

$$\frac{S_2}{J_2^2} = \frac{1}{2} (-\mathcal{W}_2 + \Delta) \quad (5.45)$$

Nous avons calculé les séries  $\mathcal{W}_2$  et  $\Delta$  (toujours avec le MM). La série  $\mathcal{W}_2$  (94 termes) a déjà été donnée à la Table C.1, tandis que nous ne donnons pas explicitement la plus longue série  $\Delta$  (157 termes)<sup>4</sup>. Lors du calcul de la série  $\Delta$  ; des termes d'ordre plus élevé en  $f$  apparaissent : il y a 233 termes jusqu'en  $\xi^3$ , qui se transforment en 249 termes seulement lors du développement  $\xi = \xi(f)$ , avec des termes jusqu'à  $10f$ . Ces 2 séries doivent alors être soustraites et divisées par 2 de sorte à obtenir le membre de droite de (5.45).

La série du membre de droite de (5.45) contient 161 termes<sup>5</sup>, et correspond exactement au membre de gauche de (5.45), qui est le  $S_2/J_2^2$  donné par Kozai (mais avec une quantité supplémentaire  $\mathcal{E}$ , indépendante de  $l$ , donnée ci-dessous). Afin de réaliser la correspondance nous avons utilisé un logiciel de manipulation symbolique (Maple) ; c'était la façon la plus aisée de réintroduire les résultats de Kozai. Nous avons tout d'abord introduit la formule (3.2) de [Kozai, 1962b, p.448] littéralement ; nous avons ensuite changé de notations en faisant la substitution  $\theta' \rightarrow c$ . Nous avons aussi du prendre en compte le lien ( $\eta \leftrightarrow e$ ) via la relation  $\eta^2 + e^2 = 1$ , et substituer  $s^2 \rightarrow 1 - c^2$  puisque Kozai n'utilise que  $c$ . Remarquons aussi que le facteur  $\frac{\mu^4}{4096G^9} L^2$  devant le résultat de Kozai  $S_2$  correspond en effet à notre  $\mathcal{F}_W^{-1}$  (défini auparavant à la Table 5.5).

La quantité supplémentaire  $\mathcal{E}$  que nous avons trouvé en soustrayant le membre de droite de (5.45) du membre de gauche (à nouveau avec le même facteur  $\mathcal{F}_W^{-1}$ ) est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & 4 \sin(2g) \eta^2 (-1244c^2 + 1077c^4 + 1212\eta^2 c^2 + 416\eta c^2 - 384\eta c^4 \\ & - 384\eta^3 c^2 + 360\eta^3 c^4 + 24\eta^3 - 1053\eta^2 c^4 - 159\eta^2 - 32\eta + 167) \end{aligned} \quad (5.46)$$

cette différence n'est pas une surprise, puisque les générateurs peuvent différer d'un facteur indépendant de  $l$  : c'est une conséquence de la constante d'intégration dans (5.16). De plus, Kozai [Kozai, 1962b, p. 448–449] mentionne le fait qu'il ajoute quel-

<sup>3</sup>Pour ces relations, la sommation sur les indices répétés a été supposée.

<sup>4</sup>Après une *séquence typique de simplification* qui réduit le nombre de termes de 233 à 157.

<sup>5</sup>Après une *séquence typique de simplification* qui réduit le nombre de termes de 185 à 161.

quefois des fonctions de  $\sin(2g)$  ou de  $\sin(4g)$  à ses générateurs, de façon à simplifier les expressions.

D'autres auteurs [Coffey and Deprit, 1982] donnent aussi une différence entre leur  $W_2$  et le résultat de Kozai, mais cette différence ne correspond pas exactement à notre  $\mathcal{E}$ , bien qu'étant similaire. Cela peut être dû au fait qu'une méthode différente a été utilisée : la transformation de Coffey par exemple est faite en 2 étapes séparées (la première étant l'élimination de la parallaxe et la seconde étant la transformation des variables de Whittaker's aux éléments de Delaunay) au lieu d'une seule ; ce chemin plus long peut avoir introduit quelques termes indépendants de  $l$ . Malheureusement, Coffey ne donne pas explicitement son  $W_2$  du second ordre, de sorte que nous ne pouvons tirer de plus amples conclusions. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous donnons ici notre  $\mathcal{W}_2$  de façon explicite.

Ainsi, notre générateur du second ordre  $\mathcal{W}_2$  valide celui de Kozai  $S_2$ , et inversement.

En plus des avantages mentionnés pour la méthode de Lie (voir Chapitre 3), nous pouvons ajouter le fait que le résultat  $\mathcal{W}_2$  est plus compact (94 termes au lieu de 161) et d'ordre plus bas ( $6f$  contre  $10f$ ) que  $S_2$ , puisque nous n'avons pas la quantité  $\Delta$ .

Rappelons notre remarque du §5.2 concernant les facteurs du genre  $1/e$  apparaissant dans certains termes : cette singularité est uniquement virtuelle, comme on l'a déjà mentionné par exemple dans [Brouwer, 1959, p.393], [Kozai, 1962b, p. 449] et [Deprit and Rom, 1970].

## 5.8 Conclusions

Nous avons obtenu des résultats du premier et second ordre pour l'effet de  $J_2$ . En calculant l'équivalence entre différentes Théories Canoniques des Perturbations, nous avons été en mesure de valider nos résultats avec les résultats de Brouwer, Kozai et Aksnes. En particulier, nous avons validé notre générateur du second ordre  $\mathcal{W}_2$  par comparaison avec le résultat  $S_2$  de [Kozai, 1962b]. Comme habituellement pour de tels développements, un soin extrême a été pris afin d'éviter toute erreur, même typographique.

Ces étapes de validation extensive donnent confiance dans notre procédure symbolique de traitement du problème du satellite artificiel, et donc dans les nouveaux résultats obtenus avec ce même outil, mais pour d'autres types de perturbations (comme  $C_{22}$ ), qui pourraient alors inclure cette fois tous les angles  $l, g, h$ .

L'ajout de la perturbation  $C_{22}$  fera précisément l'objet du Chapitre 7. Avant cela, nous étendons le problème principal au problème zonal complet dans le Chapitre suivant.





## Chapitre 6

# Le problème zonal complet du Satellite Artificiel : $J_n$

Dans le chapitre précédent, nous avons considéré le “problème principal du Satellite Artificiel”. Ce problème, qui a attiré beaucoup d’attention depuis toujours est par définition limité à l’effet du seul paramètre  $J_2$ , même si l’on peut pousser l’étude à des ordres plus élevés.

Nous avons imaginé une excursion<sup>1</sup> théorique un peu à contresens : généraliser le résultat de la moyennisation (au 1<sup>er</sup> ordre) à n’importe quel zonal  $J_n$  ( $n \geq 2$ ) cette fois — et ce de façon analytique. C’est ce que nous avons baptisé “Le problème zonal complet du Satellite Artificiel”.

Nous avons réussi le challenge et avons obtenu une forme fermée compacte pour l’Hamiltonien moyen et le générateur de n’importe quel zonal  $J_n$ . La solution est développée en puissance d’un petit facteur  $\epsilon_n$  lié à chaque zonal  $J_n$  [De Saedeleer, 2005].

Ce genre de formule peut s’avérer extrêmement utile, puisque les harmoniques zonales permettent de décrire des corps attracteurs ayant une symétrie de révolution, qui sont très courants et largement utilisés dans beaucoup de théories analytiques d’un satellite artificiel.

Plusieurs techniques de moyennisation ont été fondamentales dans la compréhension des théories de moyennisation et des transformées de Lie sous forme fermée pour les problèmes à 2 corps perturbés ; on peut citer p.ex. [Kozai, 1962b, Jefferys, 1971, Coffey and Deprit, 1982, Kelly, 1989, Osácar and Palacián, 1994]. Les intégrales apparaissant dans notre problème zonal complet pourraient sans doute être résolues par l’une ou l’autre méthode de la littérature. Mais le fait est que l’utilisateur doit toujours effectuer assez bien d’étapes, contenant pas mal de manipulations, avant de pouvoir accéder à l’Hamiltonien moyen ; tandis que nous proposons une formule analytique qui donne directement le résultat final pour n’importe quel zonal  $J_n$  dans une forme fermée, très compacte et très efficace ; une formule qui ne se trouve pas dans la littérature à notre connaissance. D’autre part, ces méthodes visent souvent à accéder aux ordres supérieurs, tandis que nous visons ici le premier ordre.

---

<sup>1</sup>Nous utilisons le vocable “excursion” car le résultat ne sera pas directement appliqué dans le cadre de la théorie analytique que nous présentons, mais pourrait rapidement l’être dans un stade ultérieur de perfectionnement.

Le calcul est mené sous une forme fermée, évitant ainsi les développements en excentricité ou en inclinaison, ou en une quelconque anomalie ; cette particularité rend la procédure de moyennisation non seulement valable pour tout type de trajectoire elliptique, mais donne en même temps l'Hamiltonien moyen sous une forme très rapide et très compacte. La formule permet à présent de contourner la procédure de moyennisation, ce qui signifie un gain d'un facteur asymptotique de  $3n/2$  sur le coût de calcul du  $n^{\text{ième}}$  zonal.

Nos formules analytiques ont été extensivement vérifiées, par comparaison d'une part avec des travaux publiés [Brouwer, 1959] (qui contenait des résultats pour certains harmoniques zonaux particuliers, typiquement de  $J_2$  à  $J_8$ ), et d'autre part avec les résultats de 3 logiciels de manipulation symbolique, dont le MM ("Moon's series Manipulator"). De plus, le générateur du premier ordre associé à cette transformation est donné dans la même forme fermée, et a également été validé. En cours de route, nous donnons également des expressions analytiques pour les valeurs moyennes par rapport à  $f$  des fonctions  $\cos^i(f)$ ,  $\cos^i(f) \cos(af)$  et  $\cos^i(f) \sin(af)$ , des formules que nous n'avions pas non plus trouvées telles quelles dans la littérature.

## 6.1 Transformée de Lie et Hamiltonien moyennisé

$$\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$$

Nous reprenons le même repère que celui fixé au Chapitre 5. Dans ce repère, l'Hamiltonien qui décrit le mouvement du satellite artificiel sous l'effet de tous les harmoniques zonaux s'écrit :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} J_n \left( \frac{R}{r} \right)^n P_n(\sin \phi) \quad (6.1)$$

$P_n(x)$  étant le Polynôme de Legendre de degré  $n$ . Si on définit le paramètre de perturbation lié au  $n^{\text{ième}}$  harmonique zonal par<sup>2</sup>

$$\epsilon_n = J_n R^n \quad (6.2)$$

alors (6.1) s'écrit :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{H}_{1,n}^{(0)} \quad (6.3)$$

avec :

$$\mathcal{H}_0^{(0)} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (6.4)$$

$$\mathcal{H}_{1,n}^{(0)} = + \frac{\mu}{r^{n+1}} P_n(\sin \phi) \quad (6.5)$$

L'Hamiltonien (6.3), qui contient le terme de champ central  $\mathcal{H}_0^{(0)}$  et le potentiel partiel perturbatif  $\mathcal{H}_{1,n}^{(0)}$ , est maintenant bien adapté pour une méthode des perturbations.

Nous utilisons ici toujours la méthode de la Transformée de Lie [Deprit, 1969]. L'Hamiltonien est écrit en puissance d'un paramètre de perturbation  $\epsilon_n$ . Pour l'Hamiltonien de départ (*input*), on écrit :  $\mathcal{H}_n^{(0)} = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon_n^i}{i!} \mathcal{H}_{i,n}^{(0)}$  ; et pour l'Hamiltonien transformé (*output*), où l'angle rapide a été éliminé, on écrit :  $\mathcal{H}_{0,n} = \sum_{i \geq 0} \frac{\epsilon_n^i}{i!} \mathcal{H}_{0,n}^{(i)}$ .

<sup>2</sup>Pour le triangle de Lie final (voir Table 3.2), nous prendrons avantageusement des paramètres de perturbation non dimensionnels.

L'algorithme de Lie consiste à imposer la forme du nouveau Hamiltonien ; ici nous le choisissons indépendant de l'angle rapide  $l$  :

$$\mathcal{H}_{0,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{1,n}^{(0)} dl = \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} \quad (6.6)$$

Nous écrirons  $\mathcal{H}_{0,n}^{(1)}$  comme étant  $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$  de façon à nous souvenir que  $l$  a été éliminé. Le générateur  $\mathcal{W}_{1,n}$  associé à cette transformation peut être calculé en utilisant la relation

$$\mathcal{H}_{0,n}^{(1)} = \mathcal{H}_{1,n}^{(0)} + \left( \mathcal{H}_0^{(0)} ; \mathcal{W}_{1,n} \right) \quad (6.7)$$

$\mathcal{H}_0^{(0)}$  étant une fonction de  $L$  seulement ( $\mathcal{H}_0^{(0)} = -\mu^2/2L^2$ ), la parenthèse de Poisson se réduit à un terme, ce qui donne :

$$\mathcal{W}_{1,n} = \frac{1}{n^*} \int_0^l \left( \mathcal{H}_{1,n}^{(0)} - \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} \right) dl \quad (6.8)$$

si nous définissons  $n^* = \mu^2/L^3$  (nous utiliserons la notation  $n^*$  dans ce Chapitre, de façon à ne pas le confondre avec l'indice  $n$  qui est le degré du zonal  $J_n$  déjà introduit en (6.1)).

Notre but est d'obtenir une expression analytique qui donne directement  $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$  pour un  $n$  donné. Ainsi, nous serons capables dans le futur de contourner l'étape de la moyennisation de  $\mathcal{H}_{1,n}^{(0)}$  puisque nous connaissons directement l'Hamiltonien moyennisé ; cela réduit drastiquement le nombre de termes manipulés (voir §6.6). Une expression analytique similaire sera aussi obtenue pour le générateur  $\mathcal{W}_{1,n}$ .

Nous avons conservé les variables que nous avons choisies au Chapitre 5 : le jeu canonique  $\Lambda$  et le jeu de variables auxiliaires  $\Xi$  définis respectivement en (5.1) et (5.8), et nous avons juste rebaptisé  $n$  en  $n^*$  pour l'occasion. L'argument  $\sin \phi$  est comme d'habitude remplacé par la relation de trigonométrie sphérique (5.7). La seule dérivée partielle dont nous aurons à nouveau besoin ici est  $\partial f / \partial l$  déjà définie en (5.26) : cette dérivée joue un rôle important, puisqu'elle permet de transformer l'intégration sur  $l$  en une intégration sur  $f$  :

$$\mathcal{H}_{0,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_{1,n}^{(0)} dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathcal{H}_{1,n}^{(0)}}{\xi^2 \eta} df = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta df = \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} \quad (6.9)$$

Dans la suite, nous appellerons  $\Delta$  la quantité  $\mathcal{H}_{1,n}^{(0)} / (\xi^2 \eta)$ . Notre but est donc de reconnaître dans  $\Delta$  la partie qui est indépendante de  $f$ , de façon à obtenir directement  $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ .

On commence par réexprimer (6.5) dans le nouveau jeu de variables  $\Xi$  (5.8) :

$$\mathcal{H}_{1,n}^{(0)} = +\frac{\mu}{r^{n+1}} P_n(\sin \phi) = n^* a^3 \left( \frac{\xi}{a} \right)^{n+1} P_n(\sin \phi) = n^* \frac{\xi^{n+1}}{a^{n-2}} P_n(\sin \phi) \quad (6.10)$$

et ensuite on exprime  $\Delta$  en vue de l'intégration en  $f$  :

$$\Delta = n^* \frac{\xi^{n-1}}{\eta a^{n-2}} P_n(\sin \phi) \quad (6.11)$$

L'intégration sera certainement possible puisque  $\xi$  apparaîtra seulement au numérateur ( $n \geq 2$ ). Notons que la variable  $h$  n'apparaît nulle part, à cause de la symétrie de révolution des problèmes zonaux.

Même si nous cherchons la forme analytique la plus compacte, il n'y a pas moyen d'éviter le développement de certaines fonctions ; c'est le prix à payer afin de pouvoir extraire la valeur moyenne. Parmi ces fonctions, il y a le polynôme de Legendre  $P_n(x)$ , qui peut être exprimé par le développement suivant (voir **8.911** 1. de

[Gradshteyn and Ryzhik, 1980]) :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k} \quad (6.12)$$

où la partie entière inférieure de  $n$  est notée  $\lfloor n \rfloor$ .

Dans (6.12), l'argument  $x$  sera  $\sin \phi = s \sin(f+g)$  par (5.7), et on devra donc considérer  $\sin^{n-2k}(f+g)$ . La fonction  $\sin(x)$  peut quant à elle se développer (voir **1.320** 1. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980]) en ceci :

$$\sin^{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\} \quad (6.13)$$

$$\sin^{2n-1}(x) = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k-1} \binom{2n-1}{k} \sin(2n-2k-1)x \quad (6.14)$$

où  $\binom{n}{k}$  signifie  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

## 6.2 Expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour le cas $n$ pair

Afin de poursuivre les développements, on suppose à partir d'ici que  $n$  est *pair* (et  $n \geq 2$ ) ; l'équation (6.13) peut dès lors être réécrite pour un  $n$  pair :

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^n} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} (-1)^{\frac{n}{2}-k} 2 \binom{n}{k} \cos(n-2k)x + \binom{n}{\frac{n}{2}} \right\} \quad (6.15)$$

et en particulier, pour la puissance paire  $n-2k$  qui apparaît dans (6.12) :

$$\sin^{n-2k}(x) = \frac{1}{2^{n-2k}} \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} (-1)^{\frac{n}{2}-k-p} 2 \binom{n-2k}{p} \cos(n-2k-2p)x + \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \right\} \quad (6.16)$$

D'autre part, la formule de Newton

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n x^i y^{n-i} \binom{n}{i} \quad (6.17)$$

permet de développer  $\xi^{n-1}$  :

$$\xi^{n-1} = \left( \frac{1 + e \cos f}{\eta^2} \right)^{n-1} = \frac{1}{\eta^{2n-2}} \sum_{i=0}^{n-1} (e \cos f)^i \binom{n-1}{i} \quad (6.18)$$

Avec (6.18) et (6.16), (6.11) peut à présent être réécrite comme étant :

$$\begin{aligned} \Delta = & n^{*2} \frac{1}{\eta a^{n-2}} \left\{ \frac{1}{\eta^{2n-2}} \sum_{i=0}^{n-1} e^i \cos^i f \binom{n-1}{i} \right\} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \frac{s^{n-2k}}{2^{n-2k}} \times \\ & \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} (-1)^{\frac{n}{2}-k-p} 2 \binom{n-2k}{p} \cos(n-2k-2p)(f+g) + \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \right\} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Définissons maintenant les quantités :

$$\begin{aligned}\alpha_{i,n}(e) &= e^i \binom{n-1}{i} \\ \beta_{k,n}(s) &= \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \frac{s^{n-2k}}{2^{n-2k}} \\ \gamma_{p,k,n} &= (-1)^{\frac{n}{2}-k-p} 2 \binom{n-2k}{p} \\ \delta_n &= \frac{n^{*2}}{2^n \eta^{2n-1} a^{n-2}}\end{aligned}\tag{6.20}$$

qui permettent d'écrire (6.19) dans une forme plus compacte, suivie de quelques manipulations de sommation afin de recombinaison les fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned}\Delta &= \delta_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f \right\} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \\ &\quad \times \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \gamma_{p,k,n} \cos(n-2k-2p)(f+g) + \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \right\} \\ &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f \right\} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \gamma_{p,k,n} \cos(n-2k-2p)(f+g) + \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \right\} \\ &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) \right. \\ &\quad \left. + \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f \right\} \\ &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \{A + B\}\end{aligned}\tag{6.21}$$

où nous avons séparé en

$$\begin{aligned}A &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) \\ B &= \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f\end{aligned}\tag{6.22}$$

de sorte que nous pouvons obtenir l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre de la façon suivante :

$$\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta df = \frac{\delta_n}{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \int_0^{2\pi} A df + \int_0^{2\pi} B df \right\}\tag{6.23}$$

Considérons tout d'abord l'intégration de  $B$  sur  $2\pi$ . Nous faisons usage de la

PROPOSITION 1 de l'Annexe D :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} B \, df &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{n-2k}{2} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f \, df \\
 &= \left( \frac{n-2k}{2} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \int_0^{2\pi} \cos^i f \, df \\
 &= \left( \frac{n-2k}{2} \right) \sum_{\substack{i=0 \\ \text{even}}}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \frac{1}{2^i} \binom{i}{\frac{i}{2}} 2\pi
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

Intégrons à présent  $A$  :

$$\int_0^{2\pi} A \, df = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n} \int_0^{2\pi} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) \, df \tag{6.25}$$

Nous pouvons séparer  $f$  de  $g$  à l'intérieur de l'intégrale en utilisant la formule  $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$  :

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{2\pi} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) \, df \\
 &= \int_0^{2\pi} \cos^i f \left\{ \cos(n-2k-2p)f \cos(n-2k-2p)g \right. \\
 &\quad \left. - \sin(n-2k-2p)f \sin(n-2k-2p)g \right\} df \\
 &= \cos(n-2k-2p)g \int_0^{2\pi} \cos^i f \cos(n-2k-2p)f \, df \\
 &\quad - \sin(n-2k-2p)g \int_0^{2\pi} \cos^i f \sin(n-2k-2p)f \, df
 \end{aligned} \tag{6.26}$$

Nous appliquons maintenant la PROPOSITION 3 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-2p)$  :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i f \sin(n-2k-2p)f \, df = 0 \tag{6.27}$$

et la PROPOSITION 2 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-2p)$  :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i f \cos(n-2k-2p)f \, df = \frac{\pi}{2^{i-1}} \binom{i}{\frac{i-(n-2k-2p)}{2}} \tag{6.28}$$

si  $i$  et  $(n-2k-2p)$  sont de même parité ; c'est-à-dire pour  $i$  pair puisque  $n$  est supposé pair.

En utilisant (6.28), (6.25) devient :

$$\int_0^{2\pi} A \, df = \sum_{\substack{i \\ \text{pair}=0}}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n} \frac{\pi}{2^{i-1}} \binom{i}{\frac{i-(n-2k-2p)}{2}} \cos(n-2k-2p)g \tag{6.29}$$

En rassemblant les résultats (6.29) et (6.24), et en simplifiant par  $2\pi$ , (6.23) devient finalement :

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta \, df = \frac{\delta_n}{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \int_0^{2\pi} A \, df + \int_0^{2\pi} B \, df \right\} \\
 &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{\substack{i \\ \text{pair}=0}}^{n-1} \frac{\alpha_{i,n}(e)}{2^i} \left[ \binom{i}{\frac{i}{2}} \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \right]
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \gamma_{p,k,n} \left( \frac{i-(n-2k-2p)}{2} \right) \cos(n-2k-2p)g \Big] \quad (6.30)$$

avec les définitions (6.20).

### 6.3 Expression analytique de $\mathcal{H}_{0,n}^{(1)}$ pour le cas $n$ impair

On peut refaire le même genre de développements, en supposant  $n$  impair cette fois (et  $n \geq 3$ ). Le polynôme de Legendre  $P_n(x)$  est toujours développé par (6.12), et on considère toujours  $\sin^{n-2k}(f+g)$ , mais maintenant l'exposant est impair, et au lieu d'utiliser (6.13), on doit utiliser (6.14), qui peut être réécrite pour un  $n$  impair :

$$\sin^n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}+k} \binom{n}{k} \sin(n-2k)x \right\} \quad (6.31)$$

et en particulier, pour la puissance impaire  $n-2k$  qui apparaît dans (6.12) :

$$\sin^{n-2k}(x) = \frac{1}{2^{n-2k-1}} \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} (-1)^{\frac{n-1}{2}-k+p} \binom{n-2k}{p} \sin(n-2k-2p)x \right\} \quad (6.32)$$

En utilisant le même développement (6.18) conjointement avec (6.32), (6.11) peut à présent être réécrite comme étant  $\Delta^*$  pour  $n$  impair de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \frac{\mathcal{H}_{1,n}^{(0)}}{\xi^2 \eta} \\ &= n^{*2} \frac{1}{\eta a^{n-2}} \left\{ \frac{1}{\eta^{2n-2}} \sum_{i=0}^{n-1} e^i \cos^i f \binom{n-1}{i} \right\} \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \frac{s^{n-2k}}{2^{n-2k}} \frac{1}{2^{-1}} \\ &\quad \times \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} (-1)^{\frac{n-1}{2}-k+p} \binom{n-2k}{p} \sin(n-2k-2p)(f+g) \right\} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Si nous reprenons les définitions (6.20) et :

$$\zeta_{p,k,n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}-k+p} \binom{n-2k}{p} \quad (6.34)$$

on peut écrire (6.33) sous une forme plus compacte. De plus, on peut unifier la définition des symboles pour le cas impair et pair, en définissant :

$$\gamma_{p,k,n}^* = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k - p} 2 \binom{n-2k}{p} = \begin{cases} \gamma_{p,k,n} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ 2\zeta_{p,k,n} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases} \quad (6.35)$$

De sorte que (6.33) peut être réécrite et manipulée de façon à recombinaison les fonctions trigonométriques :

$$\begin{aligned} \Delta^* &= \delta_n \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f \right\} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 2\beta_{k,n}(s) \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{\gamma_{p,k,n}^*}{2} \sin(n-2k-2p)(f+g) \right\} \\ &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \cos^i f \right\} \left\{ \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \gamma_{p,k,n}^* \sin(n-2k-2p)(f+g) \right\} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n}^* \cos^i f \sin(n-2k-2p)(f+g) \right\} \\
&= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \{A^*\}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

où nous avons défini  $A^*$  comme étant :

$$A^* = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n}^* \cos^i f \sin(n-2k-2p)(f+g) \tag{6.37}$$

de sorte que nous pouvons obtenir l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre par :

$$\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^* df = \frac{\delta_n}{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \int_0^{2\pi} A^* df \right\} \tag{6.38}$$

Notons qu'il n'y a pas de  $B^*$  pour le cas  $n$  impair.

Intégrons à présent  $A^*$  :

$$\int_0^{2\pi} A^* df = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n}^* \int_0^{2\pi} \cos^i f \sin(n-2k-2p)(f+g) df \tag{6.39}$$

On peut à nouveau séparer  $f$  de  $g$  à l'intérieur de l'intégrale en utilisant la formule  $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$  :

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \cos^i f \sin(n-2k-2p)(f+g) df \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^i f \left\{ \sin(n-2k-2p)f \cos(n-2k-2p)g \right. \\
&\quad \left. + \cos(n-2k-2p)f \sin(n-2k-2p)g \right\} df \\
&= \cos(n-2k-2p)g \int_0^{2\pi} \cos^i f \sin(n-2k-2p)f df \\
&\quad + \sin(n-2k-2p)g \int_0^{2\pi} \cos^i f \cos(n-2k-2p)f df
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Nous appliquons maintenant la PROPOSITION 3 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-2p)$  :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i f \sin(n-2k-2p)f df = 0 \tag{6.41}$$

et la PROPOSITION 2 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-2p)$  :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i f \cos(n-2k-2p)f df = \frac{\pi}{2^{i-1}} \left( \frac{i-(n-2k-2p)}{2} \right) \tag{6.42}$$

si  $i$  et  $(n-2k-2p)$  sont de même parité ; c'est-à-dire pour  $i$  impair puisque  $n$  est supposé impair.

En utilisant (6.42), (6.39) devient :

$$\int_0^{2\pi} A^* df = \sum_{i \text{ impair}=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n}^* \frac{\pi}{2^{i-1}} \left( \frac{i-(n-2k-2p)}{2} \right) \sin(n-2k-2p)g \tag{6.43}$$

En insérant le résultat (6.43) dans (6.38), et en simplifiant par  $2\pi$ , on obtient fina-

lement :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Delta^* df = \frac{\delta_n}{2\pi} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left\{ \int_0^{2\pi} A^* df \right\} \\ &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i \text{ impair}=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,n}(e)}{2^i} \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \gamma_{p,k,n}^* \left( \frac{i-(n-2k-2p)}{2} \right) \sin(n-2k-2p)g\end{aligned}\quad (6.44)$$

avec les définitions (6.20) et (6.35).

## 6.4 Résumé de l'expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour tout $n$

En résumé, nous avons obtenu une formule analytique qui donne l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre pour n'importe quel harmonique zonal.

Pour le cas  $n$  pair, on a :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i \text{ pair}=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,n}(e)}{2^i} \left[ \left( \frac{i}{2} \right) \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \gamma_{p,k,n}^* \left( \frac{i-(n-2k-2p)}{2} \right) \cos(n-2k-2p)g \right]\end{aligned}\quad (6.45)$$

tandis que pour le cas  $n$  impair, on a :

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i \text{ impair}=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,n}(e)}{2^i} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \gamma_{p,k,n}^* \left( \frac{i-(n-2k-2p)}{2} \right) \sin(n-2k-2p)g\end{aligned}\quad (6.46)$$

les deux formules faisant usage des définitions (6.20) et (6.35), qui sont rappelées ici :

$$\begin{aligned}\alpha_{i,n}(e) &= e^i \binom{n-1}{i} \\ \beta_{k,n}(s) &= \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} s^{n-2k} \\ \gamma_{p,k,n}^* &= (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k - p} 2 \binom{n-2k}{p} \\ \delta_n &= \frac{n^{*2}}{2^n \eta^{2n-1} a^{n-2}}\end{aligned}\quad (6.47)$$

Quelques remarques sur ces résultats :

1. Il y a bien entendu une symétrie évidente entre les cas pair et impair, en particulier les séries  $\sin(jg)$  et  $\cos(jg)$  : les harmoniques impairs sont à considérer seulement s'il n'existe pas de symétrie du corps attracteur par rapport à l'équateur.
2. La fonction  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  peut bien sûr être simplifiée via  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{pour } n \text{ impair.} \end{cases}$
3. La fonction  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  suppose implicitement (i)  $n \geq k$ , (ii)  $n \geq 0$  et

(iii)  $k \geq 0$ . (i) et (ii) sont satisfaits pour les formules (6.45)–(6.47), tandis que (iii) fournit une restriction  $p \geq \frac{n-i-2k}{2}$  pour le cas  $\left(\frac{i-(n-2k-2p)}{2}\right)$  seulement. La sommation sur  $p$  ne commence donc à donner des termes qu'à partir de cette valeur ; on prendra la convention habituelle plus aisée  $\binom{n}{k} = 0$  pour  $k < 0$ . Notons que la valeur finale de  $p$  est également quelquefois inférieure à la valeur de départ ; aucun terme n'est alors généré. Ceci peut compliquer singulièrement le comptage du nombre de termes, mais nous en avons néanmoins une description satisfaisante au §6.6.

4. Le résultat analytique rend plus aisé les considérations à propos de la caractéristique de d'Alembert, par exemple pour le terme périodique le plus rapide en  $g$ , qui est  $e^i \cos(n-2k-2p)g$ , avec  $p = p_{\min} = \frac{n-i-2k}{2}$ , on a  $e^i \cos ig$ , ce qui signifie que la caractéristique de d'Alembert est préservée.

## 6.5 Vérifications de l'expression analytique de $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$ pour $J_{2-7}$

Nous avons effectué beaucoup de vérifications de notre résultat analytique (6.45)–(6.47), par comparaison soit avec les résultats d'un autre logiciel de manipulation symbolique, soit avec des travaux publiés ; nous en présentons ici quelques-unes. Nous avons utilisé 3 logiciels de manipulation symbolique : le programme *Maple* (pour calculer le résultat analytique, et le comparer à la sortie du programme *MM*), le programme *Mathematica* (pour l'intégration symbolique de (6.11) et la comparaison de ce résultat avec notre résultat analytique), et le programme *MM* ("*Moon's series Manipulator*"), déjà présenté au Chapitre 4. Le programme *MM* a aussi été utilisé pour intégrer (6.11), ce qui a permis de vérifier certaines sous-routines génériques.

Considérons tout d'abord quelques vérifications de (6.45) pour  $n$  pair.

Pour  $n = 2$ , la formule analytique (6.45) donne  $\bar{\mathcal{H}}_{0,2}^{(1)} = \frac{n^*2}{4\eta^3}(3s^2 - 2)$  qui est le même résultat que l'Hamiltonien en  $J_2$  moyennisé au premier ordre de Brouwer [Brouwer, 1959] (en faisant abstraction de la notation ' plutôt lourde) :

$$F_1^* = \frac{\mu^4 k_2}{L^3 G^3} A \quad \text{avec} \quad A = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H^2}{G^2} \quad ((13) \text{ de Brouwer})$$

si on considère que  $\frac{F_1^*}{-2k_2} = \bar{\mathcal{H}}_{0,2}^{(1)}$  (puisque  $\epsilon_2 = 2k_2$ ).

Pour  $n = 4$ , la formule analytique (6.45) donne :

$$\bar{\mathcal{H}}_{0,4}^{(1)} = \frac{n^*2}{16\eta^7 a^2} \left\{ \left( \frac{45}{2} s^2 - \frac{105}{4} s^4 \right) e^2 \cos(2g) + \left( 9 - 45s^2 + \frac{315}{8} s^4 \right) e^2 + 6 - 30s^2 + \frac{105}{4} s^4 \right\} \quad (6.48)$$

qui est le même résultat que l'Hamiltonien en  $J_4$  moyennisé au premier ordre de

Brouwer [Brouwer, 1959, p. 389] :

$$F_1^* = \Delta_4 F_{2s}^* + \Delta_4 F_{2p}^* = \frac{\mu^6 k_4}{L^3 G^7} \left\{ \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{4} \frac{H^2}{G^2} + \frac{35}{8} \frac{H^4}{G^4} \right) \left( \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \frac{G^2}{L^2} \right) + \left( -\frac{5}{6} + \frac{20}{3} \frac{H^2}{G^2} - \frac{35}{6} \frac{H^4}{G^4} \right) \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{G^2}{L^2} \right) \cos(2g) \right\} \quad (6.49)$$

si on considère que  $\frac{F_1^*}{\frac{8}{3}k_4} = \bar{\mathcal{H}}_{0,4}^{(1)}$  (puisque  $\epsilon_4 = \frac{8}{3}k_4$ ).

Pour  $n = 6$ , la formule analytique (6.45) donne :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{0,6}^{(1)} = \frac{n^{*2}}{64\eta^{11}a^4} \left\{ \left( -\frac{1575}{32}s^4 + \frac{3465}{64}s^6 \right) e^4 \cos(4g) \right. \\ + \left[ \left( -\frac{525}{2}s^2 + \frac{1575}{2}s^4 - \frac{17325}{32}s^6 \right) e^4 \right. \\ + \left. \left( -525s^2 + 1575s^4 - \frac{17325}{16}s^6 \right) e^2 \right] \cos(2g) \\ + \left( -\frac{75}{2} + \frac{1575}{4}s^2 + \frac{17325}{32}s^6 - \frac{14175}{16}s^4 \right) e^4 \\ + \left( -100 + 1050s^2 - \frac{4725}{2}s^4 + \frac{5775}{4}s^6 \right) e^2 \\ \left. - 20 + 210s^2 - \frac{945}{2}s^4 + \frac{1155}{4}s^6 \right\} \quad (6.50) \end{aligned}$$

qui est le même résultat que l'Hamiltonien  $\bar{\mathcal{H}}_{0,6}^{(1)}$  en  $J_6$  moyennisé au premier ordre donné par le programme *MM* (voir Table 6.1).

TAB. 6.1: La série  $\bar{\mathcal{H}}_{0,6}^{(1)}$  pour  $J_6$  (20 termes)

$f$	$g$	$\xi$	$a$	$n^*$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	Coefficient
cos	0	0	0	-4	2	0	-11	0	0	$-0.3125000000000000 \times 10^0$
cos	0	0	0	-4	2	0	-11	0	2	$0.3281250000000000 \times 10^1$
cos	0	0	0	-4	2	0	-11	0	4	$-0.7382812500000000 \times 10^1$
cos	0	0	0	-4	2	0	-11	0	6	$0.4511718750000000 \times 10^1$
cos	0	0	0	-4	2	2	-11	0	0	$-0.1562500000000000 \times 10^1$
cos	0	0	0	-4	2	2	-11	0	2	$0.1640625000000000 \times 10^2$
cos	0	0	0	-4	2	2	-11	0	4	$-0.3691406250000000 \times 10^2$
cos	0	0	0	-4	2	2	-11	0	6	$0.2255859375000000 \times 10^2$
cos	0	0	0	-4	2	4	-11	0	0	$-0.5859375000000000 \times 10^0$
cos	0	0	0	-4	2	4	-11	0	2	$0.6152343750000000 \times 10^1$
cos	0	0	0	-4	2	4	-11	0	4	$-0.1384277343750000 \times 10^2$
cos	0	0	0	-4	2	4	-11	0	6	$0.8459472656250000 \times 10^1$
cos	0	2	0	-4	2	2	-11	0	2	$-0.8203125000000000 \times 10^1$
cos	0	2	0	-4	2	2	-11	0	4	$0.2460937500000000 \times 10^2$
cos	0	2	0	-4	2	2	-11	0	6	$-0.1691894531250000 \times 10^2$
cos	0	2	0	-4	2	4	-11	0	2	$-0.4101562500000000 \times 10^1$
cos	0	2	0	-4	2	4	-11	0	4	$0.1230468750000000 \times 10^2$
cos	0	2	0	-4	2	4	-11	0	6	$-0.8459472656250000 \times 10^1$
cos	0	4	0	-4	2	4	-11	0	4	$-0.7690429687500000 \times 10^0$
cos	0	4	0	-4	2	4	-11	0	6	$0.8459472656250000 \times 10^0$

Pour de plus hautes valeurs de  $n$ , comme les expressions (6.11) et (6.12) sont

exponentielles en  $n$ , la question de la précision numérique du programme  $MM$  doit être considérée ; ce programme utilise en effet des réels en double précision pour les coefficients (ce qui signifie une précision numérique de  $10^{-16}$ ). Certains coefficients de  $\bar{\mathcal{H}}_{0,6}^{(1)}$  ont déjà 12 chiffres significatifs (voir Table 6.1). Pour  $\bar{\mathcal{H}}_{0,12}^{(1)}$ , le coefficient le plus petit en valeur absolue est  $\frac{10669659}{65536} = 0.1628060760498046875 \times 10^3$  qui a 19 chiffres significatifs (notons que  $65536 = 2^{16}$ ), tandis que le plus grand est  $\frac{50414138775}{128} = 0.3938604591796875 \times 10^9$  qui a 16 chiffres significatifs.

Ce genre de considération nous a fait aboutir à 2 conclusions :

1. envisager de calculer symboliquement (c'est-à-dire sous forme de fractions) les coefficients ; cela a conduit à un développement conséquent (extension du programme  $MM$  aux fractions symboliques), qui sera résumé à l'Annexe I,
2. si on conserve les coefficients numériques, il s'agit alors de calculer les fonctions de Legendre de la façon la plus stable possible.

Nous avons donc avant tout implémenté les polynômes de Legendre avec précaution, c'est-à-dire en utilisant une récurrence robuste sur  $l$  :

$$(l-m)P_l^m(x) = x(2l-1)P_{l-1}^m(x) - (l+m-1)P_{l-2}^m(x) \quad (6.51)$$

C'est très utile, car il y a une expression sous forme fermée pour la valeur de départ :

$$P_m^m(x) = (-1)^m (2m-1)!! (1-x^2)^{m/2} \quad (6.52)$$

où  $(2m-1)!!$  signifie le produit de tous les entiers impairs plus petits ou égaux à  $(2m-1)$ . En utilisant (6.51) avec  $l = m+1$ , et en posant  $P_{m-1}^m(x) = 0$ , on trouve

$$P_{m+1}^m(x) = x(2m+1)P_m^m(x) \quad (6.53)$$

Les équations (6.52) et (6.53) fournissent les 2 valeurs de départ nécessaires pour (6.51) pour  $l$  quelconque.

Considérons à présent quelques vérifications de (6.46) pour le cas  $n$  impair.

Pour  $n = 3$ , la formule analytique (6.46) donne :  $\bar{\mathcal{H}}_{0,3}^{(1)} = \frac{n^{*2}}{8\eta^5 a} (15s^3 - 12s) e \sin(g)$  qui est le même résultat que l'Hamiltonien en  $J_3$  moyennisé au premier ordre de Brouwer [Brouwer, 1959, p. 390] :

$$F_1^* = \Delta_3 F_{2p}^* = \frac{\mu^5 A_{3,0}}{L^3 G^5} e \sin i \left( \frac{3}{8} - \frac{15}{8} \frac{H^2}{G^2} \right) \sin(g) \quad (6.54)$$

si on considère que  $\frac{F_1^*}{A_{3,0}} = \bar{\mathcal{H}}_{0,3}^{(1)}$  (puisque  $\epsilon_3 = A_{3,0}$ ).

Pour  $n = 5$ , la formule analytique (6.46) donne :

$$\bar{\mathcal{H}}_{0,5}^{(1)} = \frac{n^{*2}}{32\eta^9 a^3} \left\{ \left[ \left( 90s - 315s^3 + \frac{945}{4}s^5 \right) e^3 + (120s - 420s^3 + 315s^5) e \right] \sin(g) + \left( 35s^3 - \frac{315}{8}s^5 \right) e^3 \sin(3g) \right\} \quad (6.55)$$

qui est le même résultat que l'Hamiltonien en  $J_5$  moyennisé au premier ordre de Brouwer [Brouwer, 1959, p. 391] :

$$F_1^* = \Delta_5 F_{2p}^* = \frac{\mu^7 A_{5,0}}{L^3 G^9} e \sin i \left\{ \frac{15}{128} \left( 1 - 14 \frac{H^2}{G^2} + 21 \frac{H^4}{G^4} \right) \left( 7 - 3 \frac{G^2}{L^2} \right) \sin g - \frac{35}{256} \left( 1 - 10 \frac{H^2}{G^2} + 9 \frac{H^4}{G^4} \right) \left( 1 - \frac{G^2}{L^2} \right) \sin 3g \right\} \quad (6.56)$$

si on considère que  $\frac{F_1^*}{A_{5,0}} = \bar{\mathcal{H}}_{0,5}^{(1)}$  (puisque  $\epsilon_5 = A_{5,0}$ ).

Pour  $n = 7$ , la formule analytique (6.46) donne :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{0,7}^{(1)} = \frac{n^{*2}}{128\eta^{13}a^5} \left\{ \left( -\frac{2079}{32}s^5 + \frac{9009}{128}s^7 \right) e^5 \sin(5g) \right. \\ + \left[ \left( -\frac{4725}{8}s^3 + \frac{51975}{32}s^5 - \frac{135135}{128}s^7 \right) e^5 \right. \\ + \left( -1575s^3 + \frac{17325}{4}s^5 - \frac{45045}{16}s^7 \right) e^3 \left. \right] \sin(3g) \\ + \left[ \left( -525s + \frac{14175}{4}s^3 - \frac{51975}{8}s^5 + \frac{225225}{64}s^7 \right) e^5 \right. \\ + \left( -2100s + 14175s^3 - \frac{51975}{2}s^5 + \frac{225225}{16}s^7 \right) e^3 \\ + \left. \left( -840s + 5670s^3 - 10395s^5 + \frac{45045}{8}s^7 \right) e \right] \sin(g) \left. \right\} \quad (6.57) \end{aligned}$$

qui est le même résultat que l'Hamiltonien  $\bar{\mathcal{H}}_{0,7}^{(1)}$  en  $J_7$  moyennisé au premier ordre donné par le programme *MM* (voir Table 6.2).

TAB. 6.2: La série  $\bar{\mathcal{H}}_{0,7}^{(1)}$  pour  $J_7$  (20 termes).

	$f$	$g$	$\xi$	$a$	$n^*$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	Coefficient
sin	0	1	0	-5	2	1	-13	0	1	0	$-0.656250000000000 \times 10^1$
sin	0	1	0	-5	2	1	-13	0	3	0	$0.442968750000000 \times 10^2$
sin	0	1	0	-5	2	1	-13	0	5	0	$-0.812109375000000 \times 10^2$
sin	0	1	0	-5	2	1	-13	0	7	0	$0.439892578125000 \times 10^2$
sin	0	1	0	-5	2	3	-13	0	1	0	$-0.164062500000000 \times 10^2$
sin	0	1	0	-5	2	3	-13	0	3	0	$0.110742187500000 \times 10^3$
sin	0	1	0	-5	2	3	-13	0	5	0	$-0.203027343750000 \times 10^3$
sin	0	1	0	-5	2	3	-13	0	7	0	$0.109973144531250 \times 10^3$
sin	0	1	0	-5	2	5	-13	0	1	0	$-0.410156250000000 \times 10^1$
sin	0	1	0	-5	2	5	-13	0	3	0	$0.276855468750000 \times 10^2$
sin	0	1	0	-5	2	5	-13	0	5	0	$-0.507568359375000 \times 10^2$
sin	0	1	0	-5	2	5	-13	0	7	0	$0.2749328613281250 \times 10^2$
sin	0	3	0	-5	2	3	-13	0	3	0	$-0.123046875000000 \times 10^2$
sin	0	3	0	-5	2	3	-13	0	5	0	$0.338378906250000 \times 10^2$
sin	0	3	0	-5	2	3	-13	0	7	0	$-0.219946289062500 \times 10^2$
sin	0	3	0	-5	2	5	-13	0	3	0	$-0.461425781250000 \times 10^1$
sin	0	3	0	-5	2	5	-13	0	5	0	$0.1268920898437500 \times 10^2$
sin	0	3	0	-5	2	5	-13	0	7	0	$-0.8247985839843750 \times 10^1$
sin	0	5	0	-5	2	5	-13	0	5	0	$-0.5075683593750000 \times 10^0$
sin	0	5	0	-5	2	5	-13	0	7	0	$0.5498657226562500 \times 10^0$

## 6.6 Efficacité de l'expression analytique qui donne

$$\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$$

A présent que les formules (6.45)–(6.47) ont été vérifiées, arrive la question de leur efficacité.

Ce que nous avons fait en substance est d'ôter de (6.11) tous les termes périodiques en  $f$ , ce qui donne des résultats plus compacts. L'étape de moyennisation de

l'Hamiltonien peut à présent être contournée en utilisant directement (6.45)–(6.47).

Afin d'avoir une idée du gain au point de vue calcul, on peut comparer le nombre de termes générés avant et après l'intégration, pour  $n$  donné. C'est ce qui est fait à la Table 6.3 qui donne :

1. le nombre de termes avant l'intégration, c'est-à-dire contenus dans  $\Delta$  pour  $n$  pair, et dans  $\Delta^*$  pour  $n$  impair, et après avoir complètement développé l'expression (pas de puissance de fonctions trigonométriques),
2. le nombre de termes après l'intégration, c'est-à-dire donnés par les formules (6.45)–(6.47),
3. l'efficacité du résultat analytique, c'est-à-dire le rapport des 2 premiers nombres,
4. la tendance asymptotique pour l'efficacité.

$n$	$\#_1 = \# \left\{ \frac{\mathcal{H}_{1,n}^{(0)}}{\xi^2 \eta} \right\}$	$\#_2 = \# \left\{ \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} \right\}$	$\lfloor \frac{\#_1}{\#_2} \rfloor$	$\lfloor \frac{3n}{2} \rfloor$
2	7	2	3	3
3	18	2	9	4
4	48	8	6	6
5	90	8	11	7
6	174	20	8	9
7	280	20	14	10
8	460	40	11	12
9	675	40	16	13
10	1005	70	14	15
11	1386	70	19	16
12	1932	112	17	18
13	2548	112	22	19
70	1610910	15540	103	105
71	1702296	15540	109	106

TAB. 6.3 – Nombre de terme avant et après l'intégration ; efficacité du résultat analytique.

Comme déjà mentionné, le dénombrement analytique exact du nombre de termes peut être difficile car certaines combinaisons d'indices ne génèrent aucun terme. Cependant, nous savons en examinant (6.19) ou (6.33) que le nombre de termes avant l'intégration doit être un polynôme de degré 4 en  $n$ , et de degré 3 après l'intégration quand on examine (6.45) et (6.46). Ces polynômes ont dès lors pu être déterminés par un fitting polynomial du nombre de termes donnés par le programme *MM* pour les cas  $n = 2$ –13 (séparément pour les cas pairs et impairs).

Le nombre de termes avant l'intégration est donné par :

$$\# \left\{ \frac{\mathcal{H}_{1,n}^{(0)}}{\xi^2 \eta} \right\} = \begin{cases} \frac{(8+10n+5n^2+n^3)n}{16} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \frac{(3+7n+5n^2+n^3)n}{16} & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases} \quad (6.58)$$

tandis que le nombre de termes après l'intégration est donné par :

$$\# \left\{ \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} \right\} = \begin{cases} \frac{(8+6n+n^2)n}{24} & \text{pour } n \text{ pair,} \\ \frac{(-3-n+3n^2+n^3)}{24} & \text{pour } n \text{ impair,} \end{cases} \quad (6.59)$$

de sorte que nous en concluons que l'efficacité asymptotique des formules analytiques (6.45)–(6.47) est  $(n^4/16)/(n^3/24) = 3n/2$  pour  $n$  donné (de parité quelconque). Cela représente déjà un facteur 10 pour  $J_8$ , et 100 pour  $J_{70}$ .

## 6.7 Expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour le cas $n$ pair

Par la relation (6.8) et la définition (6.9) de  $\Delta$ , on a :

$$n^* \mathcal{W}_{1,n} = \int_0^l \left( \mathcal{H}_{1,n}^{(0)} - \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} \right) dl = \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} (f - l) + \int_{pp} \Delta df \quad (6.60)$$

où  $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$  est donné par (6.45)–(6.47) et où nous utilisons la notation  $\int_{pp}$  pour l'intégration de la *partie périodique* seulement.

Pour le cas  $n$  pair, nous avons scindé  $\Delta$  via la relation (6.21) en  $A$  et  $B$  définis en (6.22), de sorte que nous pouvons également scinder le générateur :

$$n^* \mathcal{W}_{1,n} = \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} (f - l) + n^* \mathcal{W}_{1,n}^A + n^* \mathcal{W}_{1,n}^B \quad (6.61)$$

avec les définitions

$$\begin{aligned} n^* \mathcal{W}_{1,n}^A &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n} \int_{pp} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) df \\ n^* \mathcal{W}_{1,n}^B &= \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \left( \frac{n-2k}{2} \right) \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i,n}(e) \int_{pp} \cos^i f df \end{aligned} \quad (6.62)$$

Considérons tout d'abord  $n^* \mathcal{W}_{1,n}^B$ . En utilisant la relation (D.9) de la PROPOSITION 1 nous obtenons directement :

$$\int_{pp} \cos^i(f) df = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} 2 \binom{i}{j} \frac{\sin(i-2j)f}{i-2j} \right\} \equiv \frac{C}{2^i} \quad (6.63)$$

pour  $i$  quelconque (pair ou impair).

Considérons à présent  $n^* \mathcal{W}_{1,n}^A$ . Nous pouvons à nouveau séparer  $f$  de  $g$  dans l'intégrande via la formule  $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$  :

$$\begin{aligned} & \int_{pp} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) df \\ &= \cos(n-2k-2p)g \int_{pp} \cos^i f \cos(n-2k-2p)f df \\ & \quad - \sin(n-2k-2p)g \int_{pp} \cos^i f \sin(n-2k-2p)f df \end{aligned} \quad (6.64)$$

Nous appliquons à présent la PROPOSITION 3 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-$



$2p)$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{pp} \cos^i(f) \sin((n-2k-2p)f) df \\
&= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{-\cos(i-2j+n-2k-2p)f}{i-2j+n-2k-2p} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\cos(i-2j-(n-2k-2p))f}{i-2j-(n-2k-2p)} \right\} - \lambda_i \left( \frac{i}{2} \right) \frac{\cos((n-2k-2p)f)}{n-2k-2p} \right\} \\
&\equiv \frac{CS}{2^i}
\end{aligned} \tag{6.65}$$

et la PROPOSITION 2 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-2p)$  :

$$\begin{aligned}
& \int_{pp} \cos^i(f) \cos((n-2k-2p)f) df \\
&= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j+n-2k-2p)f}{i-2j+n-2k-2p} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j-(n-2k-2p))f}{i-2j-(n-2k-2p)} \right\} + \lambda_i \left( \frac{i}{2} \right) \frac{\sin((n-2k-2p)f)}{n-2k-2p} \right\} \\
&\equiv \frac{CC}{2^i}
\end{aligned} \tag{6.66}$$

en redéfinissant  $j^* = \frac{i-a}{2} = \frac{i-(n-2k-2p)}{2}$ . On aboutit à :

$$2^i \int_{pp} \cos^i f \cos(n-2k-2p)(f+g) df = CC \cos(n-2k-2p)g - CS \sin(n-2k-2p)g$$

## 6.8 Expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour le cas $n$ impair

On peut refaire le même genre de développements, en supposant  $n$  impair cette fois (et  $n \geq 3$ ). Nous travaillons alors avec  $\Delta^*$  défini en (6.36) et considérons seulement l'intégration de la partie périodique de  $A^*$  (il n'y a pas de  $B^*$  pour le cas  $n$  impair) définie en (6.37) :

$$n^* \mathcal{W}_{1,n}^{A,*} = \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-k-1} \alpha_{i,n}(e) \gamma_{p,k,n}^* \int_{pp} \cos^i f \sin(n-2k-2p)(f+g) df \tag{6.67}$$

Nous pouvons à nouveau séparer  $f$  de  $g$  dans l'intégrande via la formule  $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$  et appliquer la PROPOSITION 3 de l'Annexe D, avec  $a = (n-2k-2p)$ , de même que la PROPOSITION 2 de l'Annexe D ; on aboutit cette fois à :

$$2^i \int_{pp} \cos^i f \sin(n-2k-2p)(f+g) df = CS \cos(n-2k-2p)g + CC \sin(n-2k-2p)g$$

avec les mêmes définitions (6.65) et (6.66) pour  $CS$  et  $CC$ .

## 6.9 Résumé de l'expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour tout $n$

En résumé, nous avons obtenu une formule analytique qui donne le générateur de la moyennisation au premier ordre pour n'importe quel harmonique zonal.

Pour le cas  $n$  pair, on a :

$$n^* \mathcal{W}_{1,n} = \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} (f - l) + \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,n}(e)}{2^i} \left[ C \binom{n-2k}{\frac{n}{2}-k} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - k} \gamma_{p,k,n}^* \left\{ CC \cos(n-2k-2p)g - CS \sin(n-2k-2p)g \right\} \right] \quad (6.68)$$

tandis que pour le cas  $n$  impair, on a :

$$n^* \mathcal{W}_{1,n} = \bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)} (f - l) + \delta_n \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \beta_{k,n}(s) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_{i,n}(e)}{2^i} \left[ \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - k} \gamma_{p,k,n}^* \left\{ CS \cos(n-2k-2p)g + CC \sin(n-2k-2p)g \right\} \right] \quad (6.69)$$

où  $\bar{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$  est donné par (6.45)–(6.47) et avec les définitions (6.47) complétées par

$$C = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} 2 \binom{i}{j} \frac{\sin(i-2j)f}{i-2j} \quad (6.70)$$

$$CS = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{-\cos(i-2j+n-2k-2p)f}{i-2j+n-2k-2p} \right\} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\cos(i-2j-(n-2k-2p))f}{i-2j-(n-2k-2p)} \right\} - \lambda_i \binom{i}{\frac{i}{2}} \frac{\cos((n-2k-2p)f)}{n-2k-2p} \quad (6.71)$$

$$CC = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j+n-2k-2p)f}{i-2j+n-2k-2p} \right\} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j-(n-2k-2p))f}{i-2j-(n-2k-2p)} \right\} + \lambda_i \binom{i}{\frac{i}{2}} \frac{\sin((n-2k-2p)f)}{n-2k-2p} \quad (6.72)$$

$$\text{avec } \lambda_i = 1 - \lceil \frac{i}{2} \rceil + \lfloor \frac{i}{2} \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \text{ pair,} \\ 0 & \text{pour } i \text{ impair,} \end{cases} \quad \text{et avec } j^* = \frac{i-(n-2k-2p)}{2}.$$

avec la même symétrie évidente qu'auparavant entre les cas pair et impair. Notons également que le générateur  $\mathcal{W}_{1,n}$  est défini à une constante (indépendante de  $f$ ) près, comme habituellement.

## 6.10 Vérifications de l'expression analytique de $\mathcal{W}_{1,n}$ pour $J_{2-8}$

Nous avons effectué beaucoup de vérifications de notre résultat analytique (6.68)–(6.72), principalement par comparaison avec les résultats du logiciel de manipulation symbolique Maple. Nous trouvons un peu trop encombrant de donner tous les détails ici ; les formules ont été validées pour  $J_2 - J_8$ .

## 6.11 Conclusions

Nous avons établi une formule analytique qui donne directement l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre  $\mathcal{H}_{0,n}^{(1)}$  pour n'importe quel harmonique zonal. La formule analytique est efficace, puisqu'elle permet de contourner le processus de moyennisation, ce qui signifie un gain asymptotique d'un facteur  $3n/2$  dans le coût de calcul du  $n^{\text{ième}}$  harmonique zonal. Les effets des harmoniques zonaux pourraient alors être facilement ajoutés de façon linéaire à des théories d'ordre plus élevé. De plus, les formules analytiques permettent plus d'interprétation physique par le fait que nous avons un accès plus aisé à un ordre donné de  $g$ .

Nous avons utilisé 3 logiciels de manipulation symbolique, parmi lesquels le *MM*. Nous avons fait des vérifications intensives, par comparaison soit avec les résultats du *MM* ou avec des travaux publiés [Brouwer, 1959]. Cela donne une excellente confiance dans notre procédure symbolique, et donc dans les nouveaux résultats obtenus avec le même outil, mais pour d'autres types de perturbations, qui contiennent éventuellement tous les angles  $l, g, h$ . Comme d'habitude pour de tels développements, un soin extrême a été accordé, de façon à éviter toute erreur, même typographique.

On pourrait facilement déduire les équations du mouvement moyennisées au premier ordre de ce résultat analytique.

Nous avons également donné une expression similaire analytique du générateur  $\mathcal{W}_{1,n}$  sous une forme fermée, qui pourrait être utilisée comme un premier pas pour obtenir, dans le futur, une théorie du second ordre, ou pour calculer les expressions explicites du changement de variables direct et inverse dans la présente théorie du premier ordre.

## Chapitre 7

### Le problème principal du Satellite Artificiel synchrone : $J_2 + C_{22}$

Après cette excursion théorique, revenons au problème principal du Satellite Artificiel.

Nous avons vu que dans le cas de la Lune, le coefficient  $C_{22}$  était particulièrement important. Nous considérons dans ce Chapitre le triangle de Lie comprenant les petites perturbations dues à la fois à  $J_2$  et à  $C_{22}$  (voir Table 3.1 du Chapitre 3), ainsi que leur couplage au second ordre.

#### 7.1 Développement de la perturbation due à $C_{22}$

La nouveauté introduite par le coefficient  $C_{22}$  est qu'il fait à présent apparaître la longitude  $\lambda'$  du satellite, en plus de sa latitude  $\phi$ . Les harmoniques sphériques étant définis par rapport à l'axe principal d'inertie du corps attracteur, nous avons besoin de définir  $\lambda_{22}$  comme la longitude du plus grand méridien lunaire (inertie minimum). Ces deux longitudes sont pour l'instant repérées par rapport à une direction fixe  $x$  du plan équatorial lunaire.

La partie du potentiel correspondant à  $C_{22}$  s'exprime dès lors par :

$$V_{22} = \frac{\mu}{r} \left( \frac{R}{r} \right)^2 C_{22} P_{22}(\sin \phi) \cos(2(\lambda' - \lambda_{22})) \quad \text{avec} \quad P_{22}(x) = 3(1 - x^2) \quad (7.1)$$

qui peut être réécrit en vue de lui appliquer la méthode des Transformées de Lie comme étant :

$$V_{22} = \delta \mathcal{H}_1^\delta \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_1^\delta = \frac{\mu}{r^3} P_{22}(\sin \phi) \cos(2(\lambda' - \lambda_{22})) \quad (7.2)$$

où  $\delta = -C_{22}R^2$ . On rassemblera ensuite les contributions perturbatrices de  $J_2$  et de  $C_{22}$  en :

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_0^{(0)} + \epsilon \mathcal{H}_1^\epsilon + \delta \mathcal{H}_1^\delta \quad . \quad (7.3)$$

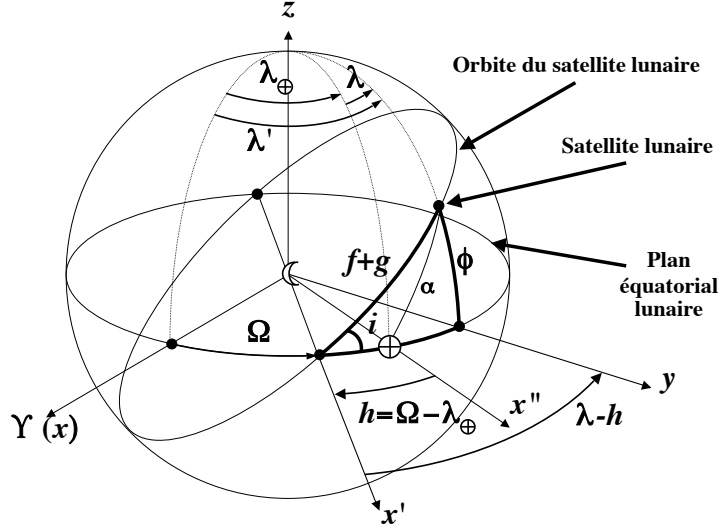
Malheureusement, l'angle  $\lambda_{22}$  rend l'Hamiltonien dépendant du temps, puisque l'axe de plus petite inertie reste aligné avec la Terre :

$$\lambda_{22} = \lambda_\oplus \quad (7.4)$$

et tourne donc à la vitesse de la rotation synchrone, qui est

$$\dot{\lambda}_\oplus = n_\mathbb{C} \quad . \quad (7.5)$$

De façon à éliminer cette dépendance temporelle, nous travaillerons dans un repère tournant dont l'axe  $x''$  est à présent dirigé vers la Terre (voir Figure 7.1).



**FIG. 7.1** – Sphère sélénocentrique simplifiée. Le centre de la Lune est pris pour origine ; le plan équatorial lunaire comme plan  $(x, y)$ , et  $\lambda_{\oplus}$  est la longitude de la Terre.

On définit alors de nouvelles longitudes, repérées par rapport à  $\lambda_{\oplus}$  :

$$\lambda = \lambda' - \lambda_{\oplus} \quad (7.6)$$

et on redéfinit également

$$h = \Omega - \lambda_{\oplus} \quad (7.7)$$

(les angles  $\Omega$  et  $\lambda_{\oplus}$  apparaîtront toujours sous la forme d'une différence). L'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  doit dès lors être complété d'un terme  $(-n_{\mathbb{C}}H)$  de façon à prendre en compte cette rotation :

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_0^{(0)} + \epsilon \mathcal{H}_1^{\epsilon} + \delta \mathcal{H}_1^{\delta} - n_{\mathbb{C}}H \quad (7.8)$$

Les équations du mouvement sont toujours données par (5.4) ; nous avons seulement changé légèrement le contenu de  $\mathcal{H}$ . A présent,  $\mathcal{H}_1^{\delta}$  peut être réécrit comme étant :

$$\mathcal{H}_1^{\delta} = +\frac{\mu}{r^3} P_{22}(\sin \phi) \cos(2\lambda) \quad (7.9)$$

Une fois de plus, le facteur  $\cos(2\lambda)$  peut être exprimé en fonction des variables de Delaunay via la trigonométrie sphérique (voir Figure 7.1). Il est utile ici de définir les notations  $(s, c) = (\sin i, \cos i)$  et  $(X, Y) = (\cos(f+g), \sin(f+g))$ , de sorte que nous avons les relations sphériques suivantes :

$$\begin{aligned} \sin \phi &= s Y \\ X &= \cos \phi \cos(\lambda - h) \\ \cos \phi &= c Y \sin(\lambda - h) + X \cos(\lambda - h) \end{aligned} \quad (7.10)$$

En résolvant (7.10) par rapport à  $\cos(2\lambda)$ , on obtient :

$$\cos(2\lambda) = \frac{[1 + Y^2(s^2 - 2)] \cos(2h) - 2cXY \sin(2h)}{\cos^2 \phi} . \quad (7.11)$$

Le dénominateur  $\cos^2 \phi$  qui apparaît dans (7.11) s'élimine lorsqu'on multiplie par  $P_{22}(\sin \phi) = 3 \cos^2 \phi$ , ce qui donne l'expression suivante pour  $\mathcal{H}_1^\delta$ , après avoir rassemblé les arguments trigonométriques et avoir enlevé les puissances des fonctions trigonométriques :

$$\mathcal{H}_1^\delta = \frac{3\mu}{4r^3} \left\{ 2s^2 \cos(2h) + c_+^2 \cos(2f + 2g + 2h) + c_-^2 \cos(2f + 2g - 2h) \right\} \quad (7.12)$$

On utilisera toujours le même jeu de variables  $\Xi$  défini en (5.8) ; les perturbations en les paramètres  $J_2$  et  $C_{22}$  se présentent in fine sous la forme finale compacte suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^\epsilon &= \frac{\xi^3 n^2}{4} (1 - 3c^2 - 3s^2 \cos(2f + 2g)) \\ \mathcal{H}_1^\delta &= \frac{\xi^3 n^2}{4} 3 \left\{ 2s^2 \cos(2h) + c_+^2 \cos(2f + 2g + 2h) + c_-^2 \cos(2f + 2g - 2h) \right\} \end{aligned} \quad (7.13)$$

ou dans leur forme équivalente pour le MM, donnée à la Table 7.1.

TAB. 7.1: La série  $\mathcal{H}_1^{(0)}$  en  $(J_2, C_{22})$  (6 termes).

	$f$	$g$	$h$	$\xi$	$n$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	3	2	0	0	0	1	0	0	0.25000D+00
cos	0	0	0	3	2	2	0	0	1	0	0	-0.75000D+00
cos	2	2	0	3	2	0	2	0	1	0	0	-0.75000D+00
cos	0	0	2	3	2	0	2	1	0	0	0	0.15000D+01
cos	2	2	2	3	2	0	0	1	0	2	0	0.75000D+00
cos	2	2	-2	3	2	0	0	1	0	0	2	0.75000D+00

## 7.2 Résultats

Le résultat du calcul de l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}$  est donné à la Table 7.2, et le générateur correspondant du premier ordre  $\mathcal{W}_1$  est donné à la Table 7.3.

TAB. 7.2: La série moyennisée  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}$  en  $(J_2, C_{22})$  (3 termes)

	$h$	$n$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	Coefficient
cos	0	2	-3	0	0	0	1	0.25000D+00
cos	0	2	-3	2	0	0	1	-0.75000D+00
cos	2	2	-3	0	2	1	0	0.15000D+01

TAB. 7.3: La série  $\mathcal{W}_1$  en  $(J_2, C_{22})$  (16 termes)

	$f$	$g$	$h$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	$\delta$	$\epsilon$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	1	0	-3	0	0	1	0	1	0	0	0.25000D+00
cos	0	0	0	1	0	-3	2	0	1	0	1	0	0	-0.75000D+00
sin	1	0	0	1	1	-3	0	0	0	0	1	0	0	0.25000D+00
sin	1	0	0	1	1	-3	2	0	0	0	1	0	0	-0.75000D+00
sin	1	2	0	1	1	-3	0	2	0	0	1	0	0	-0.37500D+00

*suite à la page suivante*

*suite de la page précédente*

	$f$	$g$	$h$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	$\delta$	$\epsilon$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
sin	2	2	0	1	0	-3	0	2	0	0	1	0	0	-0.37500D+00
sin	3	2	0	1	1	-3	0	2	0	0	1	0	0	-0.12500D+00
cos	0	0	2	1	0	-3	0	2	1	1	0	0	0	0.15000D+01
sin	1	0	2	1	1	-3	0	2	0	1	0	0	0	0.75000D+00
sin	1	0	-2	1	1	-3	0	2	0	1	0	0	0	0.75000D+00
sin	1	2	2	1	1	-3	0	0	0	1	0	2	0	0.37500D+00
sin	1	2	-2	1	1	-3	0	0	0	1	0	0	2	0.37500D+00
sin	2	2	2	1	0	-3	0	0	0	1	0	2	0	0.37500D+00
sin	2	2	-2	1	0	-3	0	0	0	1	0	0	2	0.37500D+00
sin	3	2	2	1	1	-3	0	0	0	1	0	2	0	0.12500D+00
sin	3	2	-2	1	1	-3	0	0	0	1	0	0	2	0.12500D+00

On peut réécrire l'Hamiltonien moyennisé au premier ordre  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}$  sous une forme plus habituelle :

$$\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} = \epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(1)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_\delta^{(1)} = \epsilon \frac{n^2}{4\eta^3} (1 - 3c^2) + \delta \frac{3n^2}{4\eta^3} (2s^2 \cos(2h)) \quad (7.14)$$

On s'attendait bien à cette allure : en regardant (7.13) et en considérant que la partie constante de  $\xi^3$ , après la division par  $\xi^2\eta$  donne finalement  $\eta^{-3}$ . Par ailleurs, pour le cas  $\delta = 0$  on retrouve bien entendu les résultats pour l'effet de  $J_2$  seul (voir Chapitre 5).

Le générateur du premier ordre dont la série est donnée à la Table 7.3 peut aussi se réécrire comme étant :

$$\mathcal{W}_1 = \epsilon \mathcal{W}_1^\epsilon + \delta \mathcal{W}_1^\delta \quad (7.15)$$

où  $\mathcal{W}_1^\epsilon$  a déjà été décrit en (5.18) et où

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_1^\delta = \frac{n}{8\eta^3} & \left[ 12s^2\phi \cos(2h) + 6es^2 \sin(f+2h) + 6es^2 \sin(f-2h) + 3ec_+^2 \sin(f+2g+2h) \right. \\ & + 3ec_-^2 \sin(f+2g-2h) + 3c_+^2 \sin(2f+2g+2h) + 3c_-^2 \sin(2f+2g-2h) \\ & \left. + ec_+^2 \sin(3f+2g+2h) + ec_-^2 \sin(3f+2g-2h) \right] \quad (7.16) \end{aligned}$$

avec  $\phi = f - l$ .

Les nombreuses symétries entre les paires  $(\mathcal{H}_1^\epsilon \text{ et } \mathcal{W}_1^\epsilon)$  et  $(\mathcal{H}_1^\delta \text{ et } \mathcal{W}_1^\delta)$  donnent confiance dans les nouveaux résultats du premier ordre en  $\delta$ . A nouveau, pour le cas  $\delta = 0$ , on retrouve bien sûr les résultats connus pour l'effet de  $J_2$  seul.

Le résultat du calcul de l'Hamiltonien moyennisé au second ordre  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)}$  est donné à la Table 7.4, où la série a été multipliée par le facteur  $\mathcal{F}_\mathcal{H}$  défini en (5.23) de façon à rendre le résultat le plus lisible possible. En fait, la série originelle contenait environ 341 termes, qui sont réduits à 44 puis finalement à 36 après un certain nombre de simplifications (voir §7.3).

TAB. 7.4: La série  $\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)} \times \mathcal{F}_\mathcal{H}$  en  $(J_2^2, J_2C_{22}, C_{22}^2)$  (36 termes).

	$g$	$h$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	-0.17600D+03
cos	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0.38400D+03
cos	0	0	0	0	4	0	2	0	0	0	-0.80000D+02
cos	0	0	0	1	0	4	2	0	0	0	-0.72000D+02
cos	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	-0.54000D+02

*suite à la page suivante*

<i>suite de la page précédente</i>									
	$g$	$h$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	Coefficient
cos	0	0	2	0	2	0	2	0	0.15600D+03
cos	0	0	2	0	4	0	2	0	0.10000D+02
cos	0	4	0	0	0	4	2	0	-0.80000D+02
cos	0	4	0	1	0	4	2	0	-0.72000D+02
cos	0	4	2	0	0	4	2	0	0.10000D+02
cos	2	0	2	0	0	2	2	0	-0.36000D+02
cos	2	0	2	0	2	2	2	0	0.60000D+02
cos	2	4	2	0	0	2	2	0	0.30000D+02
cos	2	-4	2	0	0	2	2	0	0.30000D+02
cos	0	0	0	0	2	0	0	2	0.80000D+01
cos	0	0	0	0	4	0	0	2	-0.40000D+02
cos	0	0	0	1	0	0	0	2	-0.40000D+01
cos	0	0	0	1	2	0	0	2	0.24000D+02
cos	0	0	0	1	4	0	0	2	-0.36000D+02
cos	0	0	2	0	0	0	0	2	0.50000D+01
cos	0	0	2	0	2	0	0	2	-0.18000D+02
cos	0	0	2	0	4	0	0	2	0.50000D+01
cos	2	0	2	0	0	2	0	2	-0.20000D+01
cos	2	0	2	0	2	2	0	2	0.30000D+02
cos	0	2	0	0	0	2	1	1	-0.12800D+03
cos	0	2	0	0	2	2	1	1	0.16000D+03
cos	0	2	0	1	0	2	1	1	-0.48000D+02
cos	0	2	0	1	2	2	1	1	0.14400D+03
cos	0	2	2	0	0	2	1	1	-0.52000D+02
cos	0	2	2	0	2	2	1	1	-0.20000D+02
cos	2	2	2	0	0	0	1	1	-0.40000D+01
cos	2	2	2	0	1	0	1	1	0.60000D+02
cos	2	2	2	0	2	0	1	1	-0.60000D+02
cos	2	-2	2	0	0	0	1	1	-0.40000D+01
cos	2	-2	2	0	1	0	1	1	-0.60000D+02
cos	2	-2	2	0	2	0	1	1	-0.60000D+02

A nouveau, on peut réécrire ces résultats sous une forme plus habituelle, en définissant :

$$\bar{\mathcal{H}}_0^{(2)} = \epsilon^2 \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\epsilon}^{(2)} + \epsilon\delta \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\delta}^{(2)} + \delta^2 \bar{\mathcal{H}}_{\delta\delta}^{(2)} \quad (7.17)$$

où  $\bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\epsilon}^{(2)}$  a déjà été donné en (5.22) et où

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon\delta}^{(2)} \times \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = & \left[ s^2 \cos(2h) \{ 32(5c^2 - 4) + 48\eta(3c^2 - 1) - 4e^2(5c^2 + 13) \} \right. \\ & + e^2 c_+^2 (-4 + 60c - 60c^2) \cos(2g + 2h) \\ & \left. + e^2 c_-^2 (-4 - 60c - 60c^2) \cos(2g - 2h) \right] \quad (7.18) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{\delta\delta}^{(2)} \times \mathcal{F}_{\mathcal{H}} = & \left[ 8(-22 + 48c^2 - 10c^4) + 2e^2(-27 + 78c^2 + 5c^4) - 72\eta s^4 (\cos(4h) + 1) \right. \\ & + 10(e^2 - 8)s^4 \cos(4h) - 12e^2 s^2 (3 - 5c^2) \cos(2g) \\ & \left. + 30e^2 s^2 c_+^2 \cos(2g + 4h) + 30e^2 s^2 c_-^2 \cos(2g - 4h) \right] \quad (7.19) \end{aligned}$$

De nouveau, des symétries (spécialement via le traceur  $\eta$ ) donnent confiance dans le résultat du second ordre moyennisé en  $\delta$ . Evidemment, dans le cas  $\delta = 0$ , on retrouve à nouveau les résultats pour le second ordre de l'effet en  $J_2$  seul. A partir de l'Hamiltonien moyennisé au second ordre, on pourrait à présent également dériver les équations du mouvement moyennisées, mais ce n'est pas le but ici.



Nous ne montrons pas ici les résultats pour le générateur du second ordre  $\mathcal{W}_2$ , car il est assez long (1395 termes, provenant de 2711 à la base). Nous avons montré au Chapitre 5 que la partie en  $\epsilon^2$ , qui contient seulement 241 termes, correspond exactement aux résultats de [Kozai, 1962b], à un facteur constant près, indépendant de  $l$ .

### 7.3 Taille des calculs et détails techniques

Un problème critique lors de tels calculs est le nombre de termes qui apparaissent dans la série (typiquement des milliers de termes ici). Considérons par exemple le calcul de la première parenthèse de Poisson :

$$\left( \epsilon \mathcal{H}_1^\epsilon + \delta \mathcal{H}_1^\delta + \epsilon \mathcal{H}_\epsilon^{(1)} + \delta \mathcal{H}_\delta^{(1)}; \epsilon \mathcal{W}_1^\epsilon + \delta \mathcal{W}_1^\delta \right) \quad (7.20)$$

L'expression (7.20) contient 2302 termes, qui doivent être intégrés. Le degré le plus haut en  $f$  est  $(\xi^6, 7f)$ , ce qui donne finalement des termes en  $10f$  lors du développement. Cet ordre de grandeur était attendu au vu de (7.13) où l'on peut voir des facteurs  $(\xi^3, 2f)$ , de (5.18) où l'on peut voir des facteurs  $(\xi^0, 3f)$ , et de la Table 5.1 où l'on peut voir des facteurs  $(\xi^2, f)$ .

La dernière colonne de la Table 7.5 donne le nombre de termes générés par le développement de chaque puissance de  $\xi$  dans le calcul de (7.20). Les deux autres colonnes donnent la même quantité, mais pour les calculs isolés de  $\epsilon$  ou de  $\delta$ . L'augmentation non linéaire dans le nombre de termes vient du couplage entre  $\epsilon$  et  $\delta$ .

	$J_2$	$C_{22}$	$J_2 \& C_{22}$
$\xi^6$	141	747	1563
$\xi^5$	177	1060	2142
$\xi^4$	185	963	2039
$\xi^3$	78	518	1051
$\xi^2$	12	45	108
Total	< 1000	< 4000	< 7000

TAB. 7.5 – Nombre de termes apparaissant lors du calcul du second ordre (7.20).

Bien sûr, nous devons être prudents et garder le nombre de termes à un montant raisonnable, autrement dit minimal. C'est pourquoi, comme mentionné précédemment, nous avons un souci permanent de simplifier les expressions au maximum, en tenant compte de la redondance du jeu de variables  $\Xi$  (5.8).

Par exemple, dans le calcul de (7.17), le simple fait de multiplier la série initiale brute par  $\eta^9$  (le dénominateur commun) et d'ensuite remplacer  $\eta^2$  par  $(1 - e^2)$  permet de réduire le nombre de termes d'un facteur environ 3 (de 315 à 107). Une fois ces simplifications faites, on peut compacter les résultats en effectuant le chemin inverse : par une opération *collect*, on peut réduire le nombre de termes de 107 à 44, et ensuite à 36, ce qui semble être la forme la plus compacte et la plus simplifiée possible.

Quelques mots sur les techniques d'intégration à présent.

On considère isolément chaque terme de la série. L'intégration est effectuée par étapes successives, qui sont codées dans des routines séparées. Les termes avec un exposant au moins égal à 2 en  $\xi$  sont tout d'abord intégrés. Parmi ceux-ci, ceux qui contiennent un facteur  $\phi$  reçoivent un traitement spécial. On sait en effet que le facteur  $\phi$  joue un rôle important dans le cadre du problème du satellite artificiel (voir [Métris, 1991]).

De plus, il s'agit d'effectuer la séquence d'étapes dans l'ordre ; par exemple pour le calcul de  $\mathcal{W}_2$ , certains termes ne devront pas être intégrés si l'on a auparavant effectué l'intégration de certains autres termes par parties, car ceux-ci s'annuleront alors [Aksnes, 1971].

Le terme de degré le plus bas à intégrer lors du calcul de (7.20) est  $\xi^0$  (il n'est pas repris dans la Table 7.5), et on considère pour ces termes-là un nouveau type d'intégration (par exemple  $\int_0^{2\pi} \xi^0 dl = 2\pi$ ), puisqu'ils ne peuvent plus cette fois être divisés par  $\xi^2 \eta$  comme auparavant.

De plus, des considérations de précision numérique doivent également entrer en jeu ; par exemple, un des 1395 termes qui apparaissent lors du calcul de  $\mathcal{W}_2$  est d'ordre  $10^{-14}$  (venant du fait que nous travaillons en double précision  $10^{-16}$  avec des facteurs de l'ordre de  $10^2$ ), et devra être éliminé.

## 7.4 Conclusions

Nous avons obtenu des résultats du second ordre pour l'effet combiné de  $J_2$  et de  $C_{22}$ .

A présent nous nous attaquons à la perturbation du 3<sup>e</sup> corps (la Terre).



## Chapitre 8

# Le problème complet du Satellite Artificiel lunaire

Dans les chapitres précédents, nous avons abouti à l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_0^{(0)} + \epsilon \mathcal{H}_1^\epsilon + \delta \mathcal{H}_1^\delta - n_{\mathbb{C}} H \quad (7.8)$$

Nous allons à présent le compléter de façon à prendre en compte la perturbation majeure de la Terre, considérée comme un effet dû à un troisième corps.

### 8.1 Expression de la perturbation due à un troisième corps

Si le troisième corps a une orbite qui est extérieure à celle du satellite (ce qui est le cas ici, le troisième corps étant la Terre  $\oplus$ ), alors le potentiel perturbateur  $\mathcal{R}$  sur le satellite (lunaire interne) peut s'écrire [Murray and Dermott, 1999] :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_{\oplus}}{|\vec{r}_{\oplus} - \vec{r}|} - \mu_{\oplus} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_{\oplus}}{r_{\oplus}^3} \quad (8.1)$$

où les positions du satellite lunaire  $\vec{r}$  et de la Terre  $\vec{r}_{\oplus}$  sont repérées par rapport au centre de la Lune, où  $|\bullet|$  représente la norme,  $\bullet \cdot \bullet$  le produit scalaire, et  $\mu_{\oplus}$  la constante de gravité terrestre ( $\mu_{\oplus} = \mathcal{G}M_{\oplus}$ ). On a en outre  $r_{\oplus} = |\vec{r}_{\oplus}|$  et  $r < r_{\oplus}$ .

La première partie du membre de droite de (8.1) est la partie directe et la seconde la partie indirecte. La partie directe peut être développée en série ( $j = 0, \dots, \infty$ ) via les polynômes de Legendre  $P_j$ , ce qui donne au final, en omettant le terme constant correspondant à  $j = 0$  et après avoir soustrait la partie indirecte qui correspond à  $j = 1$  :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}} \sum_{j=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_{\oplus}} \right)^j P_j(\cos \alpha) \quad (8.2)$$

où  $\cos \alpha$  représente l'angle entre  $\vec{r}$  et  $\vec{r}_{\oplus}$ .

En ne prenant que la partie principale (le terme  $j = 2$ ), on obtient alors :

$$\mathcal{R} = \frac{\mu_{\oplus}}{r_{\oplus}} \frac{r^2}{r_{\oplus}^2} P_2(\cos \alpha) = \frac{\mu_{\oplus}}{d_{\oplus\mathbb{C}}^3} \left( \frac{d_{\oplus\mathbb{C}}}{r_{\oplus}} \right)^3 a^2 \xi^{-2} P_2(\cos \alpha) \quad (8.3)$$

où on a fait apparaître  $\xi = a/r$  et  $d_{\oplus\mathbb{C}}$ , la distance Terre-Lune moyenne. Par distance moyenne, il faut entendre *temporellement* moyenne et non *angulairement* moyenne.

En effet, la moyenne temporelle vaut dans le cas général :

$$\left\langle \frac{r}{a} \right\rangle = 1 + \frac{e^2}{2} > 1 \quad (8.4)$$

ce qui est logique car on passe plus de temps du côté de l'apogée ; tandis que la moyenne angulaire vaut

$$\left\langle \frac{r}{a} \right\rangle_f = \sqrt{1 - e^2} < 1 \quad (8.5)$$

car  $r < a$  sur la majeure partie de  $f \in [0, 2\pi]$ . Dans le cas de la Lune, on a :

$$\begin{aligned} a_\zeta &= 384\,400 \text{ km} & [\text{Seidelmann, 1992}] \\ e_\zeta &= 0.05490 & [\text{Seidelmann, 1992}] \\ d_{\oplus\zeta} &= a_\zeta (1 + e_\zeta^2/2) = 385\,000.57 \text{ km} & [\text{Chapront-Touzé and Chapront, 1991}] \end{aligned} \quad (8.6)$$

où  $a_\zeta$  est le demi-grand axe de l'orbite de la Lune autour de la Terre, et  $e_\zeta$  son excentricité.

Nous utiliserons dans la suite la notation habituelle pour la valeur moyenne :

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bullet \, dl \quad (8.7)$$

conjointement avec une plus forme plus précise

$$\langle \bullet \rangle_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bullet \, dx \quad (8.8)$$

quand on moyennise par rapport à une autre anomalie que  $l$ .

Le terme  $\cos \alpha$  de (8.3) peut être calculé via la relation :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_\oplus}{r r_\oplus} = \frac{x x_\oplus + y y_\oplus + z z_\oplus}{r r_\oplus} \quad (8.9)$$

qui peut encore s'écrire, en développant  $(x, y, z)$  via la relation (1.10) :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= A_\oplus (\cos h \cos(f + g) - c \sin h \sin(f + g)) \\ &\quad + B_\oplus (\sin h \cos(f + g) + c \cos h \sin(f + g)) \\ &\quad + C_\oplus s \sin(f + g) \end{aligned} \quad (8.10)$$

où  $\vec{A}_\oplus = (A_\oplus, B_\oplus, C_\oplus)$  est la direction de la Terre par rapport à la Lune (cosinus directeurs). Il reste à présent à particulariser l'expression de  $\vec{A}_\oplus$  au cas Terre-Lune.

## 8.2 Développement de la perturbation due à la Terre

Afin de décrire la position relative de la Terre par rapport à la Lune, nous utiliserons la théorie analytique ELP2000 développée par [Chapront-Touzé and Chapront, 1991]. Cette théorie donne la direction opposée (la position de la Lune par rapport à la Terre), en coordonnées sphériques  $(U, V, R)$ , où  $U$  est la latitude géocentrique,  $V$  la longitude, et  $R$  le rayon, le tout dans le repère écliptique J2000. La solution est exprimée en série de Fourier dont les arguments, fonctions linéaires du temps, sont des combinaisons linéaires principalement des arguments fondamentaux de la Lune (parties séculaires), mais également des arguments d'autres planètes ( $Me, Ve, Te, Ma, Ju, Sa$ ).

La définition des arguments fondamentaux de la Lune<sup>1</sup> est rappelée à la Table

<sup>1</sup>Nous avons un peu changé les notations : nous avons utilisé  $(\lambda_\zeta, l_\zeta)$  au lieu de  $(L, l)$  afin de ne

8.1, où  $\Omega_{\mathcal{L}}$  est la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire, et où l'on a utilisé la définition de la longitude moyenne  $\lambda$  :

$$\lambda = l + g + h \quad . \quad (8.11)$$

Tous les angles ont une période de l'ordre du mois, sauf  $l_{\odot}$  qui est de l'ordre de l'année. On reconnaît bien la période sidérale  $T_{\mathcal{L}}$  pour  $\lambda_{\mathcal{L}}$ , la période synodique  $T_{\mathcal{L}} \times (13/12)$  pour  $D$ , la période anomalistique pour  $l_{\mathcal{L}}$ , la période draconitique pour  $F$ , ainsi qu'indirectement la période de 18.6 ans (  $-1935,5^{\circ}$  /siècle) pour  $\Omega_{\mathcal{L}} = \lambda_{\mathcal{L}} - F$ .

signification			phase	fréquence	période
$i$	$q_i$		$q_{i0}$ [°]	$\omega_i$ [°/siècle]	$T_i$ [j]
4	$\lambda_{\zeta}$	Longitude moyenne de la Lune	218.317	481 267.881 342 40	27.322
5	$D$	Différence : $D = \lambda_{\zeta} - \lambda_{\odot}$	297.850	445 267.111 516 75	29.531
6	$l_{\odot}$	Anomalie moyenne du Soleil	357.529	35 999.050 290 94	365.260
7	$l_{\zeta}$	Anomalie moyenne de la Lune	134.963	477 198.867 631 33	27.555
8	$F$	Différence : $F = \lambda_{\zeta} - \Omega_{\zeta}$	93.272	483 202.017 527 31	27.212

TAB. 8.1 – Les arguments fondamentaux de la Lune :  $q_{4-8} = (\lambda_{\mathcal{L}}, D, l_{\odot}, l_{\mathcal{L}}, F)$ .

Les deux grandes nouveautés de la perturbation due à un 3<sup>e</sup> corps par rapport aux perturbations dues aux harmoniques sphériques ( $J_2$  et  $C_{22}$  en l'occurrence) sont que (voir (8.3)) :

- le  $r$  apparaît au numérateur au lieu du dénominateur ( $\xi^{-2}$  au lieu de  $\xi^3$ ) — c'est dû au fait que la perturbation est externe à l'orbite du satellite au lieu d'y être interne,
- le 3<sup>e</sup> corps est en mouvement et introduit une dépendance temporelle dans l'Hamiltonien.

La première nouveauté aura pour conséquence l'utilisation de l'anomalie excentrique  $u$  afin de pouvoir calculer les intégrales (voir paragraphe suivant), tandis que pour la seconde, nous définissons des moments artificiels  $p_i$  liés aux arguments fondamentaux  $q_i$  :

$$\begin{aligned} (q_4, q_5, q_6, q_7, q_8) &\equiv (\lambda_{\mathcal{L}}, D, l_{\odot}, l_{\mathcal{L}}, F) \\ (p_4, p_5, p_6, p_7, p_8) &\equiv (p_{\lambda_{\mathcal{L}}}, p_D, p_{l_{\odot}}, p_{l_{\mathcal{L}}}, p_F) \end{aligned} \quad (8.12)$$

ce qui permet d'éviter d'introduire le temps explicitement dans l'Hamiltonien ; mais nous devons par contre y ajouter un terme supplémentaire, qui est :

$$\mathcal{T} = \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i \quad (8.13)$$

de façon à avoir

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial p_i} = \omega_i \quad i = 4 \dots 8 \quad (8.14)$$

et donc bien

$$q_i = q_{i0} + \omega_i t \quad (8.15)$$

où  $q_{i0}$  est la phase et  $\omega_i$  la fréquence de chaque argument fondamental.

Nous devons dès lors aussi étendre la définition (3.11) de la parenthèse de Pois-

---

pas confondre avec les éléments du satellite, et  $l_{\odot}$  qui est moins ambigu que  $l'$ .

son à :

$$(f; g) = \sum_{i=1}^8 \left( + \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right) . \quad (8.16)$$

Revenons au calcul de  $\vec{A}_{\oplus}$  à partir de  $(U, V, R)$ . Les auteurs de ELP2000 donnent des indications sur le nombre de termes à prendre en compte pour chacune des séries  $(U, V, R)$ , afin d'obtenir une précision donnée : nous suivons les recommandations "low precision", puisque nous n'avons pas besoin d'une précision sur des siècles mais bien sur le temps typique d'une mission lunaire, qui est généralement de 2 ans. Nous prenons donc les termes principaux, et utilisons les expressions simplifiées suivantes pour  $U$ ,  $V$  et  $R$  :

$$\begin{aligned} V &= \lambda_{\oplus} + \Delta V & \text{avec } \Delta V &= S_V + 10^{-3} S'_V \\ U &= \Delta U & \text{avec } \Delta U &= S_U \\ R &= d_{\oplus\odot} + \Delta R & \text{avec } \Delta R &= S_R \end{aligned} \quad (8.17)$$

où  $d_{\oplus\odot}$  a été défini en (8.6), et avec

$$\begin{aligned} S_V &= \sum_{n=1}^{N_V=29} v_n \sin(i_{1,n} l_{\oplus} + i_{2,n} D + i_{3,n} l_{\odot} + i_{4,n} F) \\ S'_V &= v'_1 \sin(18Ve - 16Te - l_{\oplus} + 26.5426^\circ) \\ S_U &= \sum_{n=1}^{N_U=14} u_n \sin(j_{1,n} l_{\oplus} + j_{2,n} D + j_{3,n} l_{\odot} + j_{4,n} F) \\ S_R &= \sum_{n=1}^{N_R=18} r_n \cos(k_{1,n} l_{\oplus} + k_{2,n} D + k_{3,n} l_{\odot} + k_{4,n} F) \end{aligned} \quad (8.18)$$

où  $v_n$ ,  $v'_1$ ,  $u_n$  et  $r_n$  sont des coefficients numériques.

On peut alors en déduire :

$$\begin{aligned} A_{\oplus} &= -\cos U \cos V = -\cos \Delta U (\cos \lambda_{\oplus} \cos \Delta V - \sin \lambda_{\oplus} \sin \Delta V) \\ B_{\oplus} &= -\cos U \sin V = -\cos \Delta U (\sin \lambda_{\oplus} \cos \Delta V + \cos \lambda_{\oplus} \sin \Delta V) \\ C_{\oplus} &= -\sin U = -\sin \Delta U \end{aligned} \quad (8.19)$$

Les quantités  $\Delta V$ ,  $\Delta U$  et  $\Delta R$  étant petites<sup>2</sup>, elles peuvent être développées en séries du genre :

$$\sin x = x - x^3/6 + O(x^5) \quad (8.20)$$

où le niveau de précision doit encore être fixé globalement.

En construisant la série qui donne  $\cos \alpha$ , on obtient un assez grand nombre de termes, 32044 pour être précis (voir Table 8.2, où l'on montre les coefficients extrêmes en les variables trigonométriques et les exposants extrêmes des variables polynomiales qui apparaissent durant le calcul de  $\cos \alpha$ ). Il faut ensuite mettre cette série en argument de  $P_{20}(x) = (3x^2 - 1)/2$ , ce qui génère encore plus de termes. Afin d'adopter un compromis entre la précision et le nombre de termes, nous choisissons de couper les séries à  $10^{-4}$  (il ne faut pas oublier que le tout sera encore multiplié par le facteur  $\gamma \ll 1$ ) ; les contributions planétaires de la Terre et de Vénus considérées initialement disparaissent alors.

<sup>2</sup>Ces quantités sont toutes inférieures à 0.1 rad. Les termes les plus grands sont en effet (en rad) :  $0.1 \sin l_{\oplus}$ ,  $0.087 \sin F$  et  $-0.05 \cos l_{\oplus}$ , pour  $\Delta V$ ,  $\Delta U$  et  $\Delta R$  respectivement.

	$f$	$g$	$h$	$\lambda_{\mathbb{C}}$	$D$	$l_{\odot}$	$l_{\mathbb{C}}$	$F$	$Ve$	$Te$	$c$	$s$	Coefficient
min	1	1	-1	-1	-12	-4	-9	-8	-54	-48	0	0	$0.2003708313702090 \times 10^{-14}$
max	1	1	1	1	12	4	9	8	54	48	1	1	$0.4974061815270784 \times 10^0$

TAB. 8.2 – Coefficients et exposants extrêmes apparaissant lors du calcul de  $\cos \alpha$ .

Il reste encore dans (8.3) à exprimer le facteur  $(d_{\oplus\mathbb{C}}/r_{\oplus})^3$ , qui s'écrit ( $r_{\oplus} = R$ ) :

$$\left(\frac{d_{\oplus\mathbb{C}}}{r_{\oplus}}\right)^3 = \left(\frac{1}{1 + S_R/d_{\oplus\mathbb{C}}}\right)^3 \quad (8.21)$$

et que nous pouvons à nouveau développer en série :

$$(1+x)^{-3} = 1 + 3x + 6x^2 - 10x^3 + O(x^4) \quad (8.22)$$

On définit ensuite le paramètre de perturbation terrestre  $\gamma$ , qui vient s'ajouter aux autres  $(\epsilon, \delta, n_{\mathbb{C}})$  définis en (1.67) :

$$\gamma = -\frac{\mu_{\oplus}}{d_{\oplus\mathbb{C}}^3} \quad (8.23)$$

(le signe  $-$  est imposé par la physique). On écrira alors

$$\mathcal{R} = \gamma \mathcal{H}^{\gamma} \quad (8.24)$$

En conclusion, nous donnons à la Table E.1 de l'Annexe E la série  $\mathcal{R}$  que nous obtenons finalement pour la perturbation terrestre (200 termes).

Il s'agit à présent de classer les quatre perturbations  $(\epsilon, \delta, n_{\mathbb{C}}, \gamma)$  suivant leur ordre de grandeur respectif, afin de les disposer le plus efficacement possible dans un triangle de Lie.

On remarquera tout d'abord qu'on a, pour le système Terre-Lune :

$$\mathcal{G}(M_{\oplus} + M_{\mathbb{C}}) = n_{\mathbb{C}}^2 a_{\mathbb{C}}^3 \quad (8.25)$$

d'où on tire :

$$\gamma \equiv -\frac{\mu_{\oplus}}{d_{\oplus\mathbb{C}}^3} \stackrel{(8.6)}{=} -\frac{\mathcal{G}M_{\oplus}}{a_{\mathbb{C}}^3(1+e_{\mathbb{C}}^2/2)^3} \stackrel{(8.25)}{=} -n_{\mathbb{C}}^2 \frac{M_{\oplus}}{M_{\oplus} + M_{\mathbb{C}}} \frac{1}{(1+e_{\mathbb{C}}^2/2)^3} \approx -n_{\mathbb{C}}^2 \quad ; \quad (8.26)$$

cette dernière approximation étant très bonne (mieux que 2 % près) car  $M_{\oplus}/M_{\mathbb{C}} \approx 81.3$  et  $(1+e_{\mathbb{C}}^2/2)^3 \approx 1.0045$ . On peut donc très justement considérer  $\gamma$  comme étant du second ordre par rapport à  $n_{\mathbb{C}}$ . Par ailleurs, nous avons vu au Chapitre 2 que pour une altitude de satellite lunaire inférieure à  $2R$ , les ordres de grandeur des perturbations dues à  $J_2$ ,  $C_{22}$  et à la Terre sont relativement du même ordre de grandeur (voir Figure 2.1) : on rassemblera donc  $(\epsilon, \delta, \gamma)$  au second ordre. En outre, nous avons vu que les  $\omega_i$  étaient de l'ordre du mois, tout comme  $n_{\mathbb{C}}$  : on rassemblera donc  $(n_{\mathbb{C}}, \omega_i)$  au premier ordre. En résumé, on aboutit à l'arrangement final suivant :

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_0^{(0)} + \mathcal{H}_1^{(0)} + \epsilon \mathcal{H}_2^{\epsilon} + \delta \mathcal{H}_2^{\delta} + \gamma \mathcal{H}_2^{\gamma} \quad (8.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{(0)} &= -n_{\mathbb{C}} H + \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i \\ \mathcal{H}_2^{\epsilon} &= \frac{\xi^3 n^2}{4} (1 - 3c^2 - 3s^2 \cos(2f + 2g)) \\ \mathcal{H}_2^{\delta} &= \frac{\xi^3 n^2}{4} 3 \left\{ 2s^2 \cos(2h) + c_+^2 \cos(2f + 2g + 2h) + c_-^2 \cos(2f + 2g - 2h) \right\} \\ \mathcal{H}_2^{\gamma} &= d_{\oplus\mathbb{C}}^3 r_{\oplus}^{-3} a^2 \xi^{-2} P_{20}(\cos \alpha) \end{aligned} \quad (8.28)$$



où  $\epsilon = J_2 R^2$ ,  $\delta = -C_{22} R^2$ ,  $\gamma = -\mu_{\oplus} d_{\oplus\mathbb{Q}}^{-3}$ . On considérera dès lors le Triangle de Lie annoncé à la Figure 3.1 et repris à la Figure 8.1.

$\mathcal{H}_0^{(0)}$		
$\mathcal{H}_1^{(0)} = -n_{\mathbb{Q}} H + \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i$	$\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} = \mathcal{H}_1^{(0)}$	
$\epsilon \mathcal{H}_2^{\epsilon} + \delta \mathcal{H}_2^{\delta} + \gamma \mathcal{H}_2^{\gamma}$	$\mathcal{H}_1^{(1)}$	$\epsilon \bar{\mathcal{H}}_{\epsilon}^{(2)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_{\delta}^{(2)} + \gamma \bar{\mathcal{H}}_{\gamma}^{(2)}$

$$\mathcal{W}_1 = 0$$

$$\mathcal{W}_2 = \epsilon \mathcal{W}_2^{\epsilon} + \delta \mathcal{W}_2^{\delta} + \gamma \mathcal{W}_2^{\gamma}$$

**FIG. 8.1** – Le triangle de Lie symbolique du problème complet du satellite artificiel lunaire considéré ici, et notations y afférant.

Notons qu'un classement encore plus précis des perturbations pourra être effectué au Chapitre 11, en passant à des paramètres de perturbations non dimensionnels et à des séries à coefficients directement représentatifs de l'ordre de grandeur (*triangle numérique*).

### 8.3 Moyennisation de la perturbation du 3<sup>e</sup> corps

En ce qui concerne le calcul proprement dit de la moyennisation des perturbations, la grande nouveauté est l'apparition de l'anomalie excentrique  $u$  à cause du  $r$  au numérateur. Nous devons dès lors avoir recours à de nouvelles méthodes d'intégration. Nous utiliserons principalement la méthode générale proposée par [Jefferys, 1971] afin d'intégrer une fonction du genre

$$F = \sum P(r, \dot{r}) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (jf + ku + \alpha) \quad (8.29)$$

où  $\alpha$  est une constante, que nous rappelons brièvement ici en l'adaptant à nos notations :

$$\xi = a/r \quad \text{et} \quad \theta = \dot{r}/a \quad \text{où} \quad \dot{r} \equiv dr/dl \quad (8.30)$$

1. développer  $\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (jf + ku + \alpha)$  en utilisant :

$$\sin f = \theta \eta / e, \quad \cos f = (\xi \eta^2 - 1)/e, \quad \sin u = \theta / (\xi e), \quad \cos u = (1 - \xi^{-1})/e \quad (8.31)$$

2. éliminer les puissances de  $\theta$  supérieures à 2 à l'aide de :

$$\theta^2 = -1 + 2\xi - \eta^2 \xi^2 \quad (8.32)$$

on obtient alors, si  $F$  est non singulier,

$$F = A(\xi) + B(\xi)\theta \quad (8.33)$$

3. intégrer la partie en  $B(\xi)\theta$  :

$$\int B(\xi)\theta \, dl = \frac{1}{a} \int B(\xi) \, dr = \frac{\xi^{p-1}}{-(p-1)} \quad \text{si} \quad B(\xi) = \xi^{p \neq 1} \quad (8.34)$$

le cas  $p = 1$  donnant lieu à l'apparition de  $\ln(r)$ ,

4. séparer la partie  $A(\xi)$  en deux :

$$A(\xi) = \xi^2 A_1(\xi) + \xi A_2(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi^{p \geq 2} = \xi^2 \xi^{p-2 \geq 0} \quad \text{et} \quad \xi^{p \leq 1} = \xi \xi^{p-1 \leq 0} \quad (8.35)$$

5. comme  $A_1(\xi)$  ne comporte que des puissances positives de  $\xi$  et  $A_2(\xi)$  que des négatives, on peut effectuer les substitutions suivantes :

$$\xi = (1 + e \cos f)/\eta^2 \quad \text{et} \quad \xi^{-1} = 1 - e \cos u \quad (8.36)$$

de façon à aboutir à :

$$A(\xi) = \xi^2 B_1(f) + \xi B_2(u) \quad (8.37)$$

6. il suffit alors d'intégrer  $A(\xi)$  via  $f$  et  $u$ , grâce aux relations (B.28) et (B.16) respectivement :

$$\int A(\xi) dl = \int B_1(f) \xi^2 dl + \int B_2(u) \xi dl = \frac{1}{\eta} \int B_1(f) df + \int B_2(u) du \quad (8.38)$$

Nous avons tenté de calculer le triangle de Lie symboliquement jusqu'à l'ordre 4 ; mais des intégrales du genre

$$\phi \sin kf \quad (8.39)$$

apparaissent alors, dont on sait pertinemment [Métris, 1991] qu'elles conduisent à des formules d'un niveau de complexité supérieur, et donc à un nombre de termes accru, ce que nous souhaitons éviter dans la mesure du possible. Avec le niveau de précision qui sera choisi ultérieurement, ces termes disparaîtront. Dans un premier temps, nous exploiterons donc notre modèle *symbolique* d'ordre 2 (voir Chapitre 9), et nous irons ensuite à l'ordre 4 *numériquement* (voir Chapitre 11).

Lors de cet essai du triangle de Lie symbolique à l'ordre 4, nous avons néanmoins apporté à nouveau une contribution originale en donnant des formules analytiques fermées (c'est-à-dire valables pour de hautes excentricités) explicites compactes pour les valeurs moyennes de

$$\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle \quad \text{et} \quad \langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle \quad (8.40)$$

où on suppose que  $\alpha$  est indépendant de  $l$ , où  $\psi = (u - l)$ , et avec  $0 \leq k \leq n + 1$ , et  $k, n \in \mathbb{N}$ . Ce type de fonction apparaît quand on calcule le premier et le second ordre des théories de perturbations du mouvement keplerien dues à un troisième corps sur un satellite artificiel. Nous en donnons les expressions à l'Annexe F ; elles sont non singulières en  $e$ . Ces formules pourraient s'avérer utiles pour le lecteur qui voudrait implémenter directement les valeurs moyennes, ou simplement vérifier ses routines de quadrature plus générales, peu importe la méthode utilisée. La méthode que nous avons utilisée est l'astuce habituelle qui consiste à effectuer l'intégration en passant par l'anomalie excentrique  $u$ . Ensuite nous développons les expressions binomiales de façon à extraire la valeur moyenne. Nous supposons que  $0 \leq k$  sans perte de généralité car  $\cos(-kf + \alpha) = \cos(kf - \alpha)$  et  $\sin(-kf + \alpha) = -\sin(kf - \alpha)$ . Nous utilisons des développements similaires à ceux effectués au Chapitre 6.

Exploitions à présent notre modèle symbolique d'ordre 2.



## Chapitre 9

# Exploitations intermédiaires de la théorie analytique

Nous avons déjà fait de nombreuses vérifications analytiques de différents  $\bar{\mathcal{H}}$  et de  $\mathcal{W}$ ; maintenant nous allons procéder à quelques vérifications numériques, tout en exploitant déjà la théorie analytique dans diverses directions.

### 9.1 Effet combiné de $J_2$ et de $C_{22}$ sur l'inclinaison critique

Nous avons vu dans le Chapitre 5 qu'il existait une valeur particulière de l'inclinaison, connue sous le nom d'*inclinaison critique*  $I_c = 63^\circ 26'$ , qui annulait  $\dot{g}$ .

Considérons à présent l'effet de  $C_{22}$  sur cette inclinaison critique [De Saedeleer and Henrard, 2006]. C'est une étude intéressante qui peut s'appliquer à de nombreuses situations, entre autres celles décrites à la Table 9.1. Certains auteurs se sont également intéressé aux effets à longue période de tesserax non résonants [Metris et al., 1993].

	$C_{20} \equiv -J_2$	$C_{22}$	$\chi = J_2/C_{22}$
Terre $\oplus$	$-1083 \times 10^{-6}$	$1.57 \times 10^{-6}$	689.81
Lune $\zeta$	$-202 \times 10^{-6}$	$22.26 \times 10^{-6}$	9.07
SSEH	$-J_2$	$C_{22}$	10/3
433 Eros	-0.117344	0.053278	2.20

TAB. 9.1 – Quelques valeurs de  $J_2$  et  $C_{22}$ ; SSEH signifie Satellite Synchrone en Equilibre Hydrostatique.

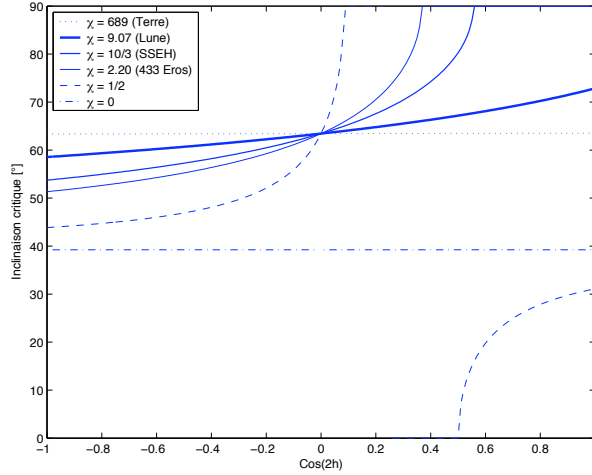
Nous partons des équations du mouvement moyen (9.1) déduites de l'Hamiltonien (7.14) :

$$\begin{aligned}
\dot{l} &= \bar{n} + \epsilon \bar{\lambda} \bar{\eta} (1 - 3\bar{c}^2) + \delta \bar{\lambda} \bar{\eta} (6\bar{s}^2 \cos 2\bar{h}) \\
\dot{g} &= 0 + \epsilon \bar{\lambda} (1 - 5\bar{c}^2) + \delta \bar{\lambda} (-2 \cos 2\bar{h}) (2\bar{c}^2 - 3\bar{s}^2) \\
\dot{h} &= 0 + \epsilon \bar{\lambda} (2\bar{c}^2) + \delta \bar{\lambda} (4\bar{c} \cos 2\bar{h})
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Nous résolvons l'équation particulière  $\dot{g} = 0$ , ce qui donne :

$$\cos^2 \bar{I}_c^* = \frac{\chi - 6\bar{k}}{5\chi - 10\bar{k}} \tag{9.2}$$

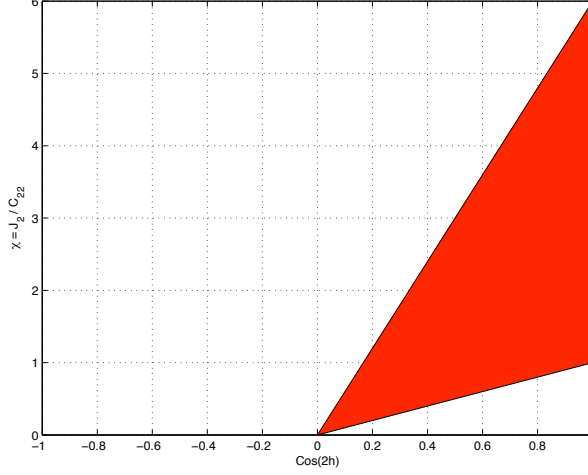
où nous avons utilisé les notations courtes  $\chi = J_2/C_{22} = -\epsilon/\delta$  et  $\bar{k} = \cos 2\bar{h}$ . La nouvelle inclinaison critique  $I_c^*$  est donc définie comme une fonction de  $(\chi, \bar{k})$ , qui est dessinée à la Figure 9.1 pour quelques valeurs de  $\chi$  (au moins celles de la Table 1.6) et pour tout l'intervalle de variation de  $\cos 2\bar{h}$ .



**FIG. 9.1** – Effet de  $C_{22}$  sur l'inclinaison critique  $I_c^*$ .

Considérons à présent les deux cas limites suivants. Pour  $\chi \rightarrow \infty$ , nous retrouvons bien entendu l'inclinaison critique classique  $I_c = 63^\circ 26'$  du problème zonal (ce qui est déjà une bonne approximation dans le cas de la Terre, pour laquelle  $\chi = 689$ ). Mais si nous ne considérons que l'effet isolé de  $C_{22}$ , c'est-à-dire le cas limite  $\chi \rightarrow 0$ , nous trouvons une nouvelle inclinaison critique  $I_c^* = 39^\circ 14'$ . Notons que  $\chi \geq 0$  puisque  $J_2 \geq 0$  et  $C_{22} \geq 0$  par définition des axes principaux d'inertie ( $A \leq B \leq C$ ).

Les cas qui se trouvent entre ces deux extrêmes exhibent une assez forte dépendance de  $I_c^*$  vis-à-vis de  $\cos 2\bar{h}$ . Par exemple, pour  $\chi = 9.07$  (c'est le cas du satellite lunaire),  $I_c^*$  varie de  $58^\circ$  à  $72^\circ$ . Le cas  $\chi = 10/3$  (SSEH) est également intéressant, car des valeurs élevées de  $\cos 2\bar{h}$  ne peuvent jamais donner naissance à une inclinaison critique  $I_c^*$  — c'est ce que nous appellerons un intervalle *non-critique*. Ce comportement peut être vérifié en exprimant la condition  $0 \leq \cos^2 \bar{I} \leq 1$ , qui donne in fine un intervalle non-critique allant de  $\chi/6$  à  $\chi$  pour  $\cos 2\bar{h}$ , ce qui est visualisé à la Figure 9.2.



**FIG. 9.2** – Intervalle non-critique (surface colorée) pour  $\cos 2\bar{h}$  comme fonction de  $\chi$ .

Si  $\chi \geq 6$ , alors n'importe quelle valeur de  $\cos 2\bar{h}$  donne naissance à une inclinaison critique  $I_c^*$ ; si  $1 \leq \chi \leq 6$ , alors il y a un intervalle non-critique supérieur, tandis que si  $0 \leq \chi \leq 1$ , alors il y a un intervalle non-critique intermédiaire. Par exemple, si  $\chi = 1/2$ , l'intervalle non-critique intermédiaire s'étend de  $\cos 2\bar{h} = \chi/6 = 1/12$  à  $\cos 2\bar{h} = \chi = 1/2$ , comme on peut le lire à la Figure 9.1.

## 9.2 Effet incrémental de chaque perturbation $\epsilon, \delta, n_{\mathcal{Q}}, \gamma$

Nous repartons de l'Hamiltonien osculateur décrit au chapitre précédent :

$$\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}_0^{(0)} + \mathcal{H}_1^{(0)} + \epsilon \mathcal{H}_2^\epsilon + \delta \mathcal{H}_2^\delta + \gamma \mathcal{H}_2^\gamma \quad (8.27)$$

dont nous élagons un peu la longue série de la perturbation terrestre  $\mathcal{H}_2^\gamma$  : nous ne considérerons dans un premier temps que les 6 termes principaux (au lieu de la série complète comprenant 200 termes et donnée à la Table E.1), et ce afin de mieux cerner les effets dominants. Nous donnons à la Table 9.2 les termes les plus influents ( $|\text{Coefficient}| > 0.1$ ) de la perturbation du second ordre. Dans cette Table, nous reconnaissons immédiatement les expressions (8.28) de  $\mathcal{H}_2^\epsilon$  et  $\mathcal{H}_2^\delta$ , tandis que nous pouvons réécrire la partie correspondante à  $\mathcal{H}_2^\gamma$  sous la forme plus habituelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_2^\gamma = a^2 \xi^{-2} \Big[ & -0.12466(1-3c^2) + 0.37225 s^2 \cos(2(h-\lambda_{\mathcal{Q}})) + 0.37397 s^2 \cos(2(f+g)) \\ & + 0.18612 \{ c_+^2 \cos(2(f+g+h-\lambda_{\mathcal{Q}})) + c_-^2 \cos(2(f+g-h+\lambda_{\mathcal{Q}})) \} \Big] \quad (9.3) \end{aligned}$$

TAB. 9.2: La série  $\mathcal{H}_2^{(0)} = \epsilon \mathcal{H}_2^\epsilon + \delta \mathcal{H}_2^\delta + \gamma \mathcal{H}_2^\gamma$  (12 termes).

	$f$	$g$	$h$	$\lambda_{\mathcal{Q}}$	$\xi$	$a$	$n$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	$\gamma$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	3	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.25000D+00
cos	0	0	0	0	3	0	2	2	0	0	1	0	0	0	-0.75000D+00
cos	2	2	0	0	3	0	2	0	2	0	1	0	0	0	-0.75000D+00
cos	0	0	0	0	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	-0.12466D+00
cos	0	0	0	0	-2	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0.37398D+00
cos	0	0	2	-2	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0.37225D+00
cos	2	2	0	0	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0.37397D+00
cos	2	2	2	-2	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0.18612D+00
cos	2	2	-2	2	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	2	0.18612D+00
cos	0	0	2	0	3	0	2	0	2	1	0	0	0	0	0.15000D+01
cos	2	2	2	0	3	0	2	0	0	1	0	0	2	0	0.75000D+00
cos	2	2	-2	0	3	0	2	0	0	1	0	0	0	2	0.75000D+00

Nous appliquons ensuite la Transformée de Lie symbolique jusqu'à l'ordre 2 (voir Figure 8.1). Nous nous intéressons donc dans cette partie surtout aux effets du premier ordre  $(\epsilon, \delta, \gamma)$ , tandis que des effets d'ordre supérieur (comme  $\epsilon^2, \delta^2, \epsilon\delta$ ) ont déjà été décrits ailleurs (voir chapitre 7). L'Hamiltonien du second ordre moyennisé  $\bar{\mathcal{H}}$  (en  $\epsilon, \delta, \gamma$ ) duquel nous pouvons déduire les équations du mouvement moyen, et ensuite procéder aux intégrations numériques est donné à la Table 9.3.

TAB. 9.3: La série  $\bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(2)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_\delta^{(2)} + \gamma \bar{\mathcal{H}}_\gamma^{(2)}$  (13 termes).

	$\bar{g}$	$\bar{h}$	$\bar{\lambda}_{\mathcal{Q}}$	$\bar{a}$	$\bar{n}$	$\bar{e}$	$\bar{\eta}$	$\bar{c}$	$\bar{s}$	$\delta$	$n_{\mathcal{Q}}$	$\epsilon$	$\gamma$	$\bar{c}_+$	$\bar{H}$	$\bar{c}_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-0.10000D+01
cos	0	0	0	0	2	0	-3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0.25000D+00
cos	0	0	0	0	2	0	-3	2	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.75000D+00
cos	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.12466D+00
cos	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0.37398D+00
cos	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.18699D+00
cos	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0.56096D+00
cos	0	2	-2	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.37225D+00
cos	0	2	-2	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.55837D+00
cos	2	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.93493D+00
cos	2	2	-2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0.46531D+00
cos	2	-2	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0.46531D+00
cos	0	2	0	0	2	0	-3	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0.15000D+01

On peut réécrire  $\bar{\mathcal{H}}$  sous une forme plus habituelle :

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}} = \bar{\mathcal{H}}_0^{(1)} + \epsilon \bar{\mathcal{H}}_\epsilon^{(2)} + \delta \bar{\mathcal{H}}_\delta^{(2)} + \gamma \bar{\mathcal{H}}_\gamma^{(2)} = -n_{\mathcal{C}}\bar{H} + \epsilon \frac{\bar{n}^2}{4\bar{\eta}^3}(1 - 3\bar{c}^2) + \delta \frac{3\bar{n}^2}{2\bar{\eta}^3}(\bar{s}^2 \cos(2\bar{h})) \\ + \gamma \bar{a}^2 \left[ (1 - 3\bar{c}^2)(-0.12466 - 0.18699\bar{e}^2) + 0.37225 \bar{s}^2 \cos(2(\bar{h} - \bar{\lambda}_{\mathcal{C}})) \right. \\ + 0.55837 \bar{s}^2 \bar{e}^2 \cos(2(\bar{h} - \bar{\lambda}_{\mathcal{C}})) + 0.93493 \bar{s}^2 \bar{e}^2 \cos(2\bar{g}) \\ \left. + 0.46531 \bar{e}^2 \{ \bar{c}_+^2 \cos(2(\bar{g} + \bar{h} - \bar{\lambda}_{\mathcal{C}})) + \bar{c}_-^2 \cos(2(\bar{g} - \bar{h} + \bar{\lambda}_{\mathcal{C}})) \} \right] \quad (9.4) \end{aligned}$$

### 9.2.1 Intégrations numériques

Dans les parties suivantes, nous allons investiguer numériquement les différents effets liés à chaque perturbation, et ce de façon progressive afin de mieux cerner l'effet de chacun d'eux :  $\epsilon$  seul au §9.2.2,  $(\epsilon + \delta)$  au §9.2.3,  $(\epsilon + \delta + n_{\mathcal{C}})$  et  $(\epsilon + \delta + n_{\mathcal{C}} + \gamma)$  au §9.2.4. Les équations du mouvement moyen déduites de (9.4) ont été intégrées numériquement.

Nous avons utilisé un intégrateur basé sur une méthode de type Burlish-Stoer [Press et al., 1986]. Cette méthode est basée sur trois idées :

- la première idée est de considérer la solution comme étant une fonction analytique dépendant du seul paramètre  $\delta t$  (le pas d'intégration d'une méthode de type *Runge-Kutta* ; la fonction de la solution est approximée à partir des points obtenus en faisant varier le pas ; ensuite la solution est calculée en prenant  $\delta t = 0$ ,
- la deuxième idée est celle de Burlish et Stoer qui utilisent des fonctions d'extrapolations rationnelles au lieu de séries pour fitter la solution,
- la troisième idée est l'utilisation d'une méthode permettant de trouver une fonction erreur dépendant de  $\delta t^2$  au lieu de seulement  $\delta t$ .

Cette méthode de lissage augmente la stabilité numérique de l'intégration et permet des intégrations de bonne qualité sur de longs laps de temps.

Les valeurs numériques suivantes ont été utilisées comme conditions initiales moyennes :

$$\bar{l}_0 = 10 \text{ rad}, \quad \bar{g}_0 = 1 \text{ rad}, \quad \bar{h}_0 = 2 \text{ rad}, \quad \bar{a}_0 = 3000 \text{ km}, \quad \bar{e}_0 = 0.2, \quad \bar{i}_0 = 30^\circ. \quad (9.5)$$

Pour  $a = 3000 \text{ km}$ , la période du satellite est d'environ 4.1 h.

Nous avons également utilisé les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{C}} = 3.66 \times 10^{13} \text{ km}^3/\text{j}^2 \quad \mu_{\oplus} = 81.3 \mu_{\mathcal{C}} \quad \epsilon = 613.573 \text{ km}^2 \\ \delta = -67.496 \text{ km}^2 \quad n_{\mathcal{C}} = 0.230 \text{ rad/j} \quad \gamma = -0.05214 \text{ rad/j}^2 \end{aligned} \quad (9.6)$$

On peut facilement sélectionner un effet en mettant les autres paramètres de perturbation à zéro.

### 9.2.2 Effet de $J_2$ seul

L'effet de  $J_2$  seul (premier ordre) est illustré à la Figure 9.3. Les quantités  $(a, e, i)$  restent constantes, tandis que les angles  $g$  et  $h$  précessent, avec des périodes d'approximativement 3 et 5 ans respectivement. Ces taux sont consistants avec

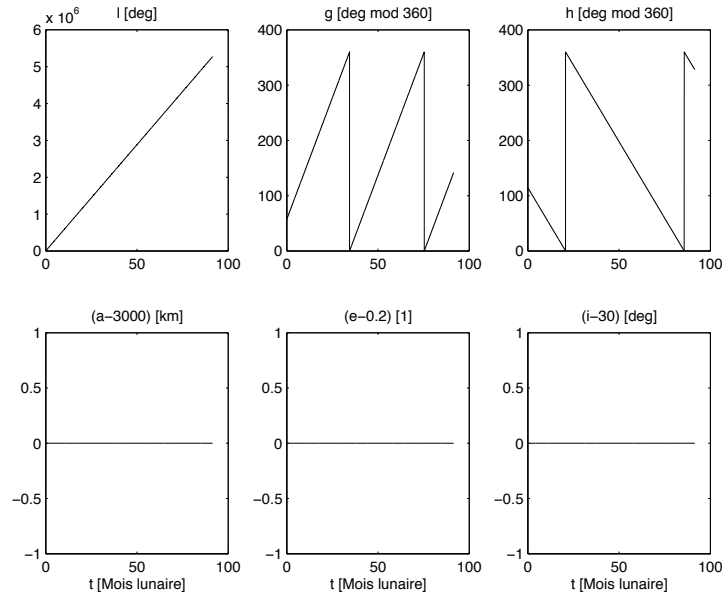


les deux formules classiques données par exemple dans [Szebehely, 1989, Roy, 1968, Jupp, 1988] :

$$\dot{\omega} = (3n/2)J_2(R/p)^2(2 - (5/2)\sin^2 i) \quad (9.7)$$

$$\dot{\Omega} = (-3n/2)J_2(R/p)^2 \cos i \quad (9.8)$$

où  $p = a(1-e^2)$ . Notons que le taux de précession des éléments de l'orbite du satellite lunaire est plus faible (1/5) que dans le cas des satellites artificiels terrestres, puisque le  $J_2$  de la Lune est inférieur (1/5).

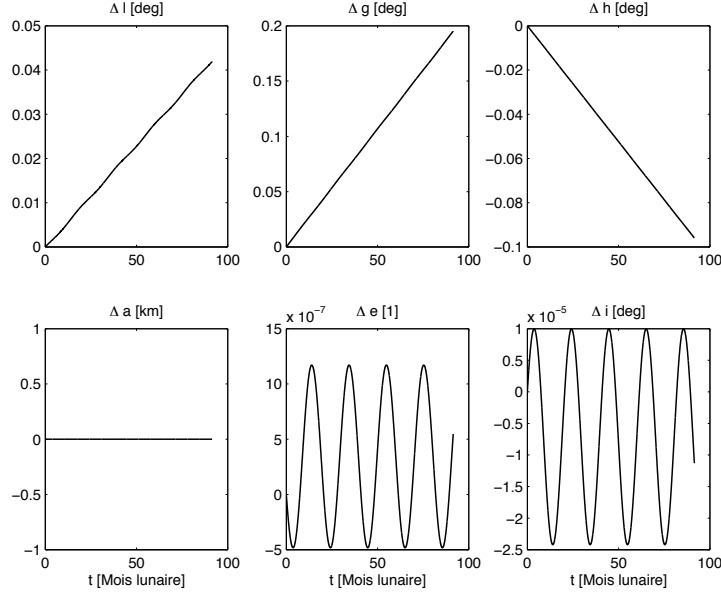


**FIG. 9.3** – Effet de  $J_2$  seul ( $\epsilon \neq 0, \delta = 0 = n_{\mathcal{C}} = \gamma$ ) : intégration du modèle moyen (9.4) pour l'effet du premier ordre ; les conditions initiales sont (9.5).

Au second ordre en  $J_2$  seul (intégration des équations du mouvement moyen déduites de (5.22)), les quantités  $e$  et  $i$  commencent à osciller, puisque l'Hamiltonien moyen contient un facteur  $\cos(2g)$ , d'où  $\dot{G} \neq 0$ . La période est donc de la moitié de 3 ans (environ 18 mois lunaires, bien visible à la Figure 9.4), mais l'amplitude des oscillations est toutefois faible :  $1.654 \times 10^{-6}$  pour  $e$ , et  $3.420 \times 10^{-5}^\circ$  pour  $i$ . La différence des effets du second et du premier ordre est représentée à la Figure 9.4.

### 9.2.3 Effet conjugué de $J_2$ et de $C_{22}$

Nous revenons à présent au premier ordre en  $J_2$ , où  $(a, e, i)$  étaient constants. Si nous ajoutons la perturbation en  $C_{22}$ , l'angle  $h$  intervient, via un facteur  $\cos(2h)$  cette fois, de sorte que  $\dot{H} \neq 0$ , ce qui fait que  $i$  commence à osciller (mais toujours pas  $e$ , puisque  $\dot{G} = 0$ ). Les amplitudes sont cette fois-ci très significatives, puisqu'il s'agit d'un effet du premier ordre ; dans notre exemple numérique (dessiné à la Figure 9.5),  $i$  oscille environ de  $29$  à  $37^\circ$ . La période est de la moitié de 5 ans (environ 35 mois lunaires, bien visible sur la Figure 9.5).



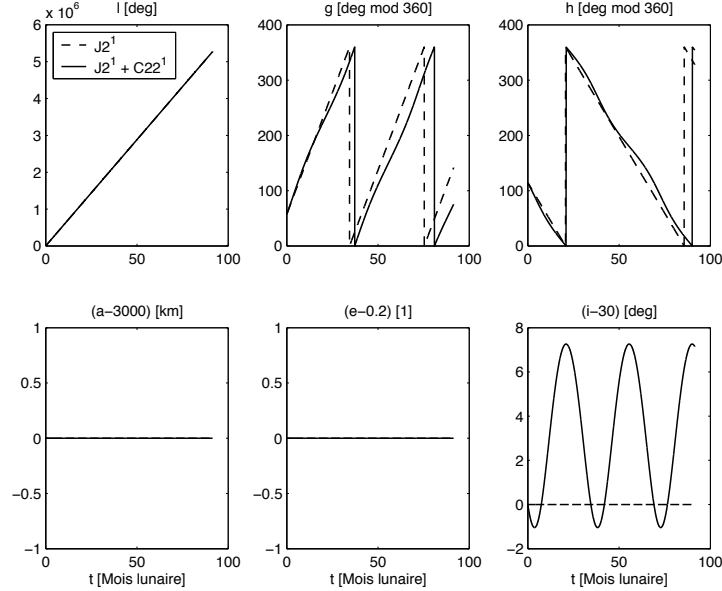
**FIG. 9.4** – Effet de l'ordre considéré pour  $J_2$  ( $\epsilon \neq 0, \delta = 0 = n_{\mathcal{C}} = \gamma$ ) : intégration (i) du modèle moyen (9.4) pour l'effet du premier ordre, et (ii) de (5.22) pour l'effet du second ordre ; dans les deux cas les conditions initiales sont (9.5). Nous avons ensuite tracé la différence (ii)–(i) pour chacun des éléments.

L'introduction de  $C_{22}$  a une autre conséquence : elle modifie assez significativement l'inclinaison critique  $I_c = 63^\circ 26'$  en de nouvelles valeurs  $I_c^*$ , comme cela a été montré au §9.1. Dans le cas de la Lune,  $I_c^*$  peut se situer dans l'intervalle  $58^\circ$ – $72^\circ$ .

#### 9.2.4 Effet supplémentaire de $n_{\mathcal{C}}$ et de la Terre

L'effet de  $n_{\mathcal{C}}$  et de la Terre est montré à la Figure 9.6. Regardons d'abord les courbes en traits discontinus, étiquetées "sans Terre". Ce cas correspond à l'effet des perturbations ( $J_2 + C_{22} + n_{\mathcal{C}}$ ). Donc, dans un premier temps, nous n'avons ajouté que  $n_{\mathcal{C}}$  par rapport au §9.2.3 : la conséquence est que l'angle  $h$  tourne à présent plus rapidement : la période est le mois (période  $T_{\mathcal{C}}$  de la rotation synchrone) au lieu de 5 ans, et l'inclinaison dès lors varie également, avec une période d'un demi-mois ; l'amplitude est assez petite : environ  $0.05^\circ$ .

Nous avons ensuite ajouté l'effet de la Terre, en considérant en première approximation seulement les quelques termes dominants de la perturbation de 3<sup>e</sup> corps (i.e. les 9 termes en  $\gamma$  de la Table 9.3). On constate que l'inclinaison est à présent modulée par une période d'environ 1.2 ans avec une amplitude plus grande ( $0.5^\circ$ ), ce qui est causé par un facteur  $\sin(2g)$  dans  $\dot{G}$ , avec une période de 2.4 ans pour  $g$ . Mais un autre phénomène est encore plus flagrant : la variation de l'excentricité, qui était jusqu'alors constante. L'excentricité commence à osciller, avec une période d'un quart de mois, et des amplitudes assez petites ; mais la même modulation à

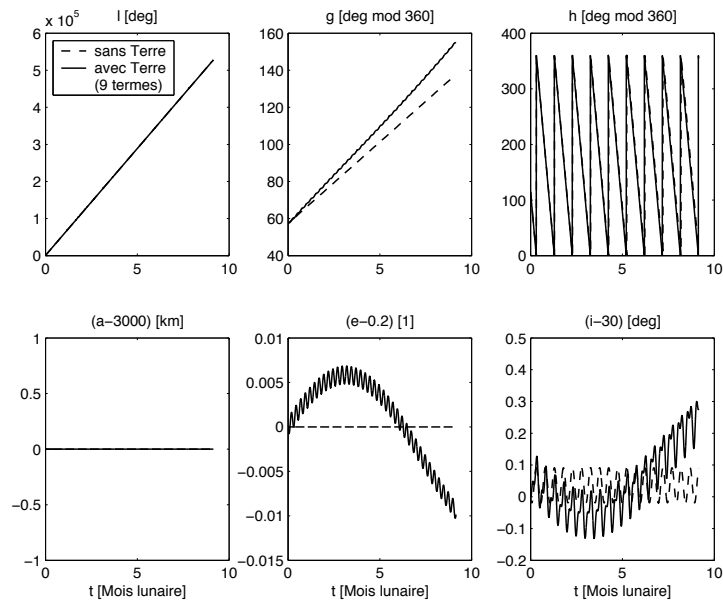


**FIG. 9.5** – Effet conjugué de  $J_2$  et de  $C_{22}$  ( $\epsilon \neq 0, \delta \neq 0, n_{\mathcal{C}} = 0 = \gamma$ ) : intégration du modèle moyen (9.4) pour l’effet du premier ordre ; les conditions initiales sont (9.5).

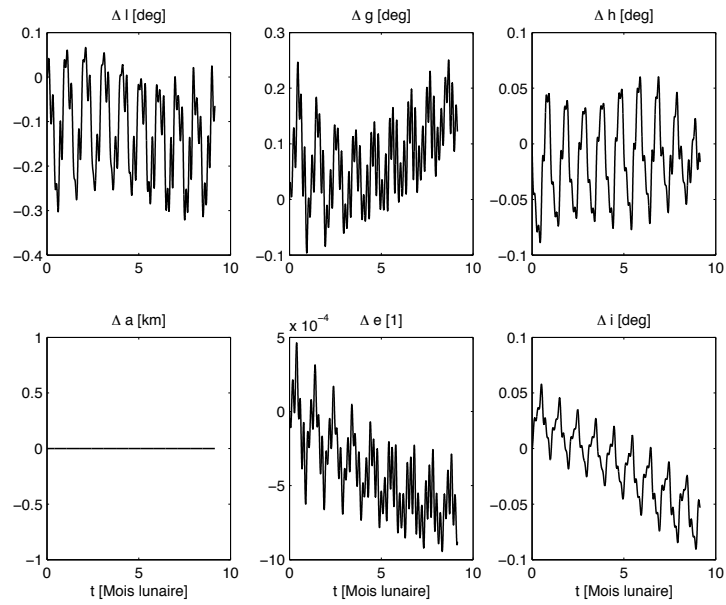
long terme que pour  $i$  apparaît (une période d’environ 1.2 ans avec des amplitudes plus importantes, valant environ 0.02).

On imagine que la stabilité d’un satellite lunaire doit être fortement affectée par la présence de la Terre, spécialement pour des orbites plus hautes. Bien sûr, la dynamique est toujours très dépendante des conditions initiales. L’excentricité peut quelquefois devenir si élevée que le satellite s’écrase sur la Lune, comme c’est le cas pour les satellites polaires. Ces aspects de stabilité seront étudiés plus en profondeur au §9.3.

L’effet du nombre de termes considérés pour la perturbation terrestre est montré à la Figure 9.7. Nous avons intégré le modèle moyen (9.4) pour l’effet du premier ordre, avec ( $\epsilon \neq 0, \delta \neq 0, n_{\mathcal{C}} \neq 0, \gamma \neq 0$ ) et les conditions initiales (9.5). La perturbation terrestre osculatrice comprenait (i) une fois les 9 termes principaux (précision  $10^{-6}$ ) et (ii) une autre fois tous les termes (précision  $10^{-9}$ ) ; nous avons ensuite tracé la différence (i)–(ii) pour chacun des éléments ; cette différence est de l’ordre de  $10^{-3}$ . On en conclut que la tendance principale était déjà bien donnée par les termes de la Table 9.3, mais que le fait de prendre en compte plus de termes peut donner une description quelque peu plus précise.



**FIG. 9.6** – Effet additionnel de  $n_{\mathcal{A}}$  et de la Terre : intégration du modèle moyen (9.4) pour l'effet du premier ordre ; nous avons pris dans les deux cas ( $\epsilon \neq 0, \delta \neq 0, n_{\mathcal{A}} \neq 0$ ) avec les conditions initiales (9.5). Ensuite nous avons pris une fois  $\gamma = 0$  (ligne en traits d'union : sans l'effet de la Terre) et une fois  $\gamma \neq 0$  (ligne en trait continu : avec l'effet de la Terre).



**FIG. 9.7** – Effet du nombre de termes considérés pour la perturbation terrestre : intégration du modèle moyen (9.4) pour l'effet du premier ordre, avec ( $\epsilon \neq 0, \delta \neq 0, n_\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$ ) et les conditions initiales (9.5). Différence pour chacun des éléments entre le modèle à 9 termes en  $\gamma$  et le modèle complet.

### 9.2.5 Conditions initiales osculatrices versus moyennes

Dans cette partie, nous présentons une validation qualitative du processus de moyennisation : nous comparons le mouvement moyen (intégration du modèle moyen (9.4)) et le mouvement osculateur (intégration du modèle osculateur (8.27)). Afin d'illustrer cela, nous reprenons notre exemple simple du §9.2.2 : effet du premier ordre en  $J_2$  seul ( $\epsilon \neq 0, \delta = 0 = n_{\mathcal{C}} = \gamma$ ), où les  $(a, e, i)$  moyens étaient constants.

Si l'on n'y prend garde, on peut avoir quelques surprises ; par exemple, si l'on prend les mêmes conditions initiales à la fois pour le mouvement osculateur, et le mouvement moyen, les valeurs moyennes semblent incorrectes vis-à-vis des valeurs osculatrices (voir Figure 9.8, dessus). Dans notre choix particulier de conditions initiales, la quantité  $\bar{a}$  correspond à un minimum plutôt qu'à une valeur moyenne ; cela ne devrait bien entendu pas être le cas. Notons que nous pouvons distinguer clairement la période du satellite sur le mouvement osculateur, qui est d'environ 4.1 h pour  $a = 3000$  km.

La solution est d'adapter les conditions initiales, en utilisant la même transformation que celle qui a été utilisée pour moyenniser l'Hamiltonien (voir Figure 3.1(b)). Il faut tenir compte du fait que le résultat est inversé : si on utilise l'algorithme direct du triangle de Lie, alors on aura la fonction  $\bar{a} = a + \dots$ . Si l'on a plutôt besoin de  $a = \bar{a} + \dots$ , alors on devra utiliser l'algorithme de l'inverse [Henrard, 1973] dès qu'on considère le second ordre. Un exemple détaillé d'une telle transformation est donné à l'Annexe E.2, où nous avons utilisé la notation  $\beta = (1 - \eta)/e = e/(1 + \eta)$ . Si on adapte les conditions initiales  $(l, g, h, a, e, i)$  de la sorte, la correspondance entre les valeurs moyennes et osculatrices est alors bien correcte (à l'ordre considéré pour la transformation), comme on peut le voir à la Figure 9.8 (dessous). On trouvera des considérations similaires dans [Metris and Exertier, 1995].

Le but de notre travail étant de bâtir une théorie moyenne aux fins d'analyse de mission, les transformations de quantités moyennes vers osculatrices peuvent s'avérer très utiles ; de plus, cette transformation est nécessaire lors de la validation numérique de la théorie moyenne (voir Chapitre 11). La transformation peut se faire de manière exacte puisque les générateurs de Lie sont disponibles et que l'on ne considère pas de données réelles de suivi de satellite lunaire ici.

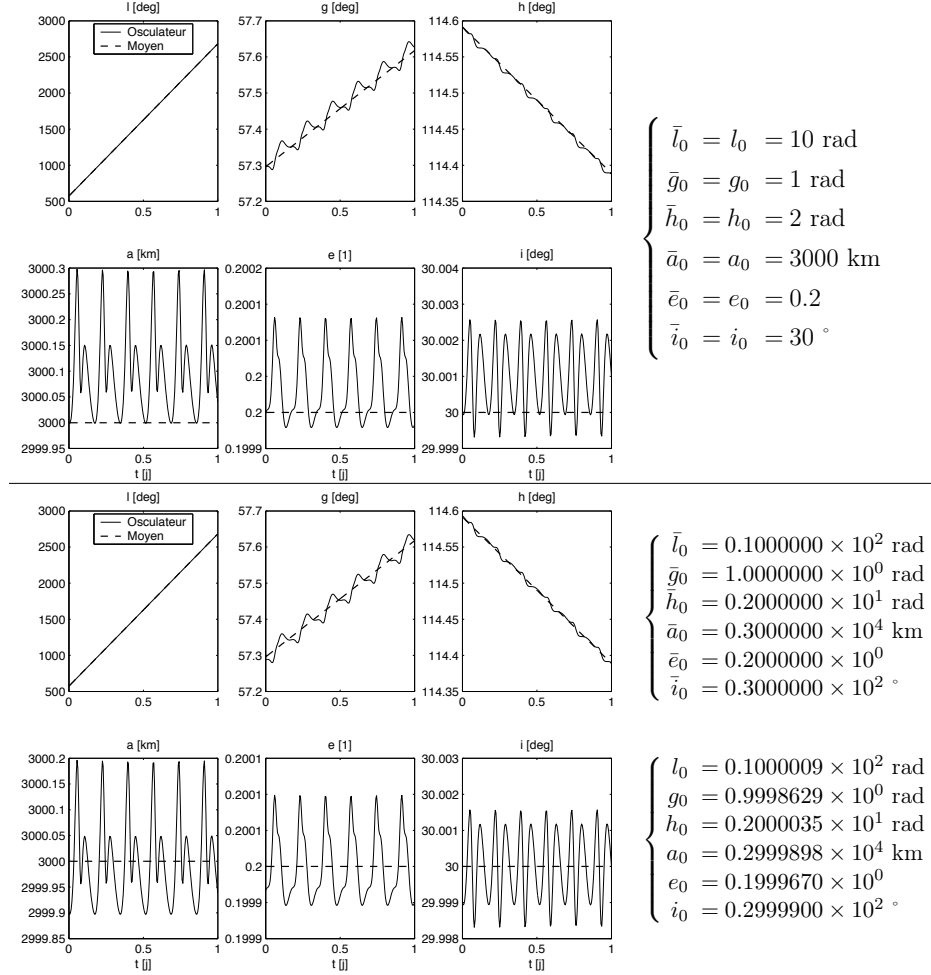
### 9.2.6 Conclusion

Nous avons procédé à des intégrations numériques afin de valider le processus de moyennisation.

L'intégration d'un modèle moyen simplifié nous a permis de mettre en évidence l'effet de chaque perturbation ; et ce de façon progressive, afin d'aboutir à une meilleure compréhension des mécanismes sous-jacents.

Nous avons souligné quelques aspects de transformation de coordonnées, aspects dont nous aurons besoin afin de vérifier la qualité de notre première moyennisation (voir Chapitre 11).

Nous avons mis en évidence le fait que l'excentricité pouvait bouger suite à l'action de la perturbation terrestre, et ce à partir de quelques termes déjà. C'est ce phénomène de perturbation terrestre que nous nous proposons d'investiguer plus en



**FIG. 9.8** – Comparaison du mouvement moyen (ligne en traits d’union, intégration de (9.4)) et du mouvement osculateur (ligne en trait continu, intégration de (8.27)), pour l’effet du premier ordre en  $J_2$  seul ( $\epsilon \neq 0, \delta = 0 = n_{\mathcal{C}} = \gamma$ ) : sans adapter les conditions initiales (dessus) ; et en adaptant les conditions initiales (dessous).

détails dans le paragraphe suivant.

### 9.3 Compétition Terre-Lune : durée de vie d'un satellite lunaire

Un aspect intéressant à étudier est la stabilité de l'orbite d'un satellite lunaire. On imagine aisément que cette stabilité doit être fortement affectée par la présence de la Terre, spécialement pour des orbites plus hautes. Pour les orbites basses, c'est le champ de gravité lunaire qui jouera un rôle important.

Le comportement du subsatellite d'Apollo 16 est d'ailleurs une démonstration claire et catastrophique de l'influence importante du champ de gravité sur l'orbite : alors qu'on pensait être bien à l'abri des problèmes, car loin de la perturbation terrestre, c'est le champ gravifique lunaire qui a pris le relais et a causé les dégâts. [Konopliv et al., 1993] a montré que la durée de vie d'un satellite en orbite basse circulaire est seulement dépendante des coefficients zonaux, et que l'effet des zonaux était important pour de basses inclinaisons surtout. La sensibilité à l'inclinaison est extrême : un satellite situé à une altitude  $h = 100$  km et avec  $i = 10^\circ$  ne vit que 35 jours (c'est le cas du subsatellite d'Apollo 16), tandis qu'il peut vivre plusieurs années si  $i > 30^\circ$ .

En fait, l'effet le plus désastreux d'une perturbation est incontestablement d'augmenter l'excentricité de façon telle que l'altitude chute jusqu'à ce que le satellite termine sa vie en s'écrasant sur le corps central, et ce en quelques mois [Liu and Wang, 2000], ou même en quelques jours [Meyer et al., 1994]. L'augmentation de l'excentricité peut être due soit aux harmoniques zonaux d'ordres supérieurs sur un satellite bas [D'Avanzo et al., 1997], en particulier les harmoniques impairs [Knežević and Milani, 1998] et surtout  $J_5$  [Meyer et al., 1994], soit à l'effet du 3<sup>e</sup> corps sur un satellite haut [Liu and Wang, 2000]. Par ailleurs, la durée de vie est également dépendante des conditions initiales.

Dans le cadre de notre théorie (orbites moyennes à plus hautes), l'effet du 3<sup>e</sup> corps va donc devenir dominant à partir d'une certaine distance d'éloignement par rapport à la Lune ; reste à déterminer dans ce cas :

1. à partir de quelle distance l'orbite devient franchement instable,
2. quelle est la durée de vie orbitale d'un satellite lunaire qui serait à une telle distance ?

Il est connu dans la littérature [Marchal, 2000] que les perturbations sont dans ce cas plus importantes pour de hautes inclinaisons (orbites polaires ou quasi-polaires). C'est alors l'effet du  $J_2$  qui va stabiliser ces orbites, dans la mesure où elles ne sont pas vraiment trop hautes. Nous sommes donc dans la situation paradoxale où des orbites lunaires polaires plus hautes sont plus dangereuses que les plus basses !

Nous définissons la *durée de vie*  $\Delta t$  du satellite lunaire comme le moment où le satellite s'écrase sur le sol lunaire :

$$\Delta t \equiv t \text{ tel que } h_p(t) = 0 \quad (9.9)$$

le temps étant compté à partir des conditions initiales et la dynamique étant conservative. Précisons qu'il s'agit bien d'une durée de vie *orbitale* à proprement parler, sans aucune considération énergétique ni opérationnelle.

Un cas nominal intéressant a été étudié par [Steichen, 1998] :

$$l_0 = 0^\circ, \quad g_0 = 40^\circ, \quad h_0 = 40^\circ, \quad a_0 = 4 [R_L], \quad e_0 = 0.2, \quad i_0 = 85^\circ, \quad (9.10)$$

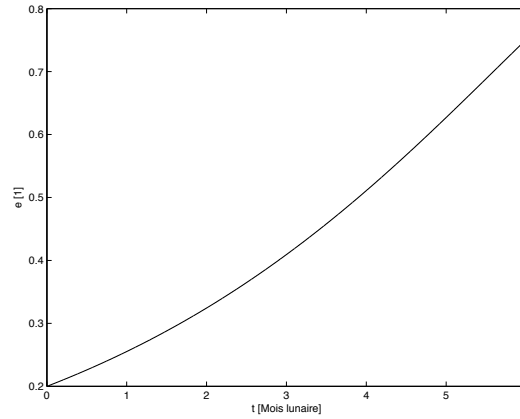


où l'on peut voir que la durée de vie est de seulement  $\Delta t = 6$  mois lunaires<sup>1</sup> environ. C'est l'excentricité qui grimpe de 0.2 à 0.75 qui en est responsable. Par ailleurs, [Marchal, 2000] précise que les orbites polaires sont instables à partir de  $1.771 R_{\text{L}}$ .

Nous avons vérifié que notre modèle pouvait reproduire ces différents résultats : c'est bien le cas.

Mieux encore : nous nous sommes attachés à expliquer la hausse de l'excentricité avec les effets du troisième corps. Quelques indications peuvent être trouvées dans [Liu and Wang, 2000, Marchal, 2000], mais elles restent floues.

Dans cette partie, seules les perturbations dues à  $\epsilon$  et à  $\gamma$  ont été considérées, et ce afin de pouvoir comparer avec la littérature. On constate à la Figure 9.9 que l'excentricité grimpe effectivement de 0.2 à 0.75 ( $e_{\text{max}} = 1 - 1/a_0$ ).



**FIG. 9.9** – Effet du troisième corps (la Terre) sur un satellite lunaire quasi-polaire : hausse de l'excentricité jusqu'à l'écrasement sur le sol lunaire. Les conditions initiales sont (9.10), avec  $i_0 = 90^\circ$ .

Même s'il n'est pas facile d'imaginer ce qui se passe physiquement au juste, l'explication mathématique est en tous cas relativement simple : on peut calculer comment varie l'excentricité, par exemple via :

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial L} \dot{L} + \frac{\partial e}{\partial G} \dot{G} = -\frac{\eta}{na^2e} \dot{G} \quad . \quad (9.11)$$

Or le terme dominant de la série  $\dot{G}$  déduit de l'Hamiltonien moyennisé est :

$$-0.298 \times 10^{-4} \gamma e^2 a^2 s^2 \sin(2g) \quad (9.12)$$

ce qui fait que

$$\frac{de}{dt} = +0.298 \times 10^{-4} \gamma \frac{e \eta s^2}{n} \sin(2g) > 0 \quad . \quad (9.13)$$

Cette expression explique bien le fait que l'excentricité croît, que cette hausse est due à l'effet du troisième corps ( $\gamma$ ), et que cette hausse est d'autant plus importante que l'orbite est plus inclinée ( $s = \sin(i)$ ); l'effet maximal étant obtenu pour les orbites polaires.

Nous avons ensuite pris une base de comparaison encore plus large, semblable à

<sup>1</sup>Par mois lunaires nous entendons toujours mois *sidéraux* lunaires.

celle de [Liu and Wang, 2000] qui donne les durées de vie pour différentes valeurs de conditions initiales. Nos résultats sont en accord (voir Table 9.4).

$a_0$	$e_0$	$i_0$	$\Delta t$ [j]		
$[R_\oplus]$	[1]	[°]	[Liu and Wang, 2000]	Ce travail	$\Delta$ [%]
2.0	0.10	89.95	574.0	575.1	0.2
2.0	0.20	89.95	313.0	322.4	3.0
3.0	0.10	89.95	337.7	342.4	1.4
3.0	0.20	85.0	220.0	224.9	2.2
4.0	0.10	89.95	232.3	239.2	3.0
4.0	0.20	85.0	162.3	163.8	0.9

TAB. 9.4 – Comparaison des durées de vie  $\Delta t$  de satellites lunaires pour des conditions  $(a_0, e_0, i_0)$  variables et  $(l_0, g_0, h_0) = (0^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$  fixes.

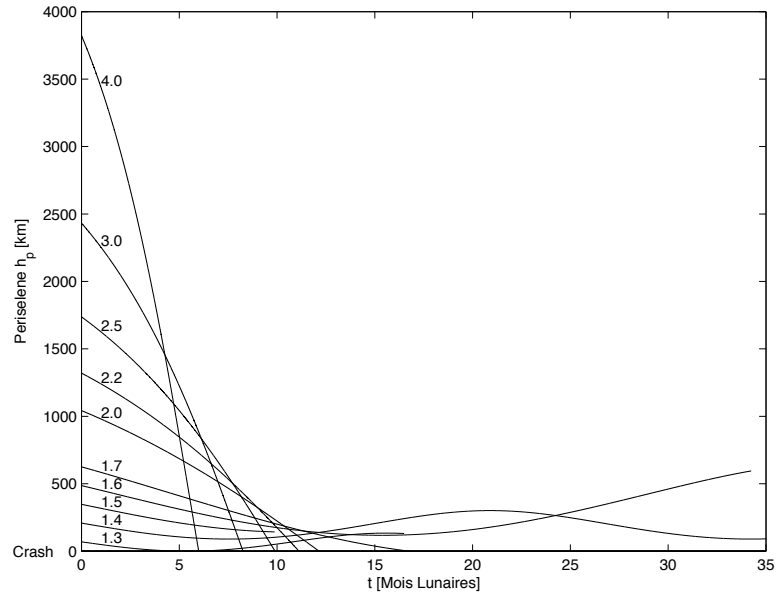
Nous avons ensuite effectué une étude paramétrique plus poussée de l'effet de l'altitude initiale du satellite (polaire). Les résultats sont donnés aux Figures 9.10 et 9.11. et les valeurs numériques correspondantes sont reprises à la Table 9.5. La conclusion principale est que la durée de vie chute très nettement vers 1.6–1.7  $R_\oplus$ , ce qui est en concordance avec [Marchal, 2000].

$a_0$	$\Delta t$
$[R_\oplus]$	[Mois lunaire]
1.3000	30.0000
1.4000	30.0000
1.5000	30.0000
1.6000	30.0000
1.7000	16.7740
2.0000	12.1550
2.2000	11.1260
2.5000	9.8960
3.0000	8.2610
4.0000	5.9950

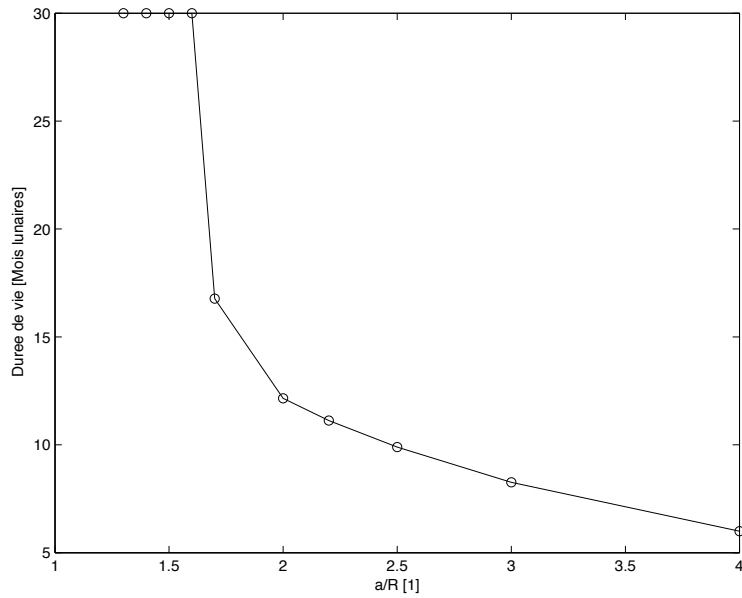
TAB. 9.5 – Effet de l'altitude sur la durée de vie  $\Delta t$  d'un satellite lunaire polaire, et avec  $e = 0.2$ .

Quand nous aurons moyennisé l'Hamiltonien une seconde fois, nous pourrons nous permettre d'effectuer une étude de durées de vie sur un beaucoup plus grand nombre de conditions initiales (des milliers).

Avant cela, nous choisissons d'affiner le classement des perturbations en considérant un triangle de Lie *numérique* au lieu de *symbolique*.



**FIG. 9.10** – Effet de l'altitude initiale sur la durée de vie d'un satellite lunaire polaire ( $e = 0.2, i = 90^\circ$ ). Les courbes sont paramétrées en fonction de  $a/R$ .



**FIG. 9.11** – Effet de l'altitude initiale sur la durée de vie d'un satellite lunaire polaire ( $e = 0.2, i = 90^\circ$ ).

## Chapitre 10

### Triangle de Lie numérique d'ordre 4

Nous allons à présent affiner le classement des perturbations. Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec des paramètres symboliques, qui ont permis de classer les perturbations. Les paramètres symboliques comportent sans nul doute des avantages, qui ont bien été mis en évidence au cours des Chapitres précédents. Toutefois, si on souhaite imposer un niveau de précision global pour la moyennisation, il est préférable que l'ordre de grandeur des perturbations ne soit plus caché dans un paramètre, mais ressorte directement dans le coefficient numérique associé au terme correspondant. Il sera ainsi plus facile de rassembler les termes du même ordre de grandeur et d'aboutir à une théorie d'une précision donnée.

#### 10.1 Paramètres de perturbation adimensionnels

Le fait que les paramètres de perturbation soient dimensionnels (comme  $\epsilon = J_2 R^2$ ) est gênant : nous choisissons donc de rendre l'Hamiltonien sans dimensions.

Il faut dès lors choisir une unité de fréquence. Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, il est impossible de classer des perturbations sans fixer l'altitude du satellite lunaire. Nous faisons donc le choix d'une altitude nominale :

$$h_N = 500 \text{ km} \quad . \quad (10.1)$$

Avec cette valeur de  $h_N$ , on aura  $a = R + h_N = 1.29 R$  où  $R$  est le rayon équatorial lunaire. La période nominale du satellite sera de 2.64 h, et la fréquence nominale sera :

$$n_N = 57.16 \text{ rad/j} \quad . \quad (10.2)$$

Le choix d'une valeur nominale particulière ne pose pas de problèmes en soi : on pourra toujours imposer n'importe quelle autre valeur, et l'ensemble du processus (automatique) de moyennisation suivra ; certains termes seront simplement réordonnés — comme il se doit. Nous donnons à la Table 10.1 les fréquences associées à différentes altitudes, et qui pourraient être utiles le cas échéant.

Nous repartons donc de l'Hamiltonien complet défini en (8.27) avec (8.28). Par souci de lisibilité, nous reprenons plutôt les formes compactes (5.5) et (7.9), ce qui

$a[km]$	$a[R]$	$h[km]$	$h[R]$	$n[rad/j]$	$T[h]$
1737.53	1.00	0.0	0.00	83.53	1.81
2237.53	1.29	500.0	0.29	57.16	2.64
3000.00	1.73	1262.5	0.73	36.82	4.10
3475.06	2.00	1737.5	1.00	29.53	5.11
8687.65	5.00	6950.1	4.00	7.47	20.18

TAB. 10.1 – Fréquence du satellite lunaire en fonction de l'altitude  $h$ .

donne :

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2} - n_{\mathbb{C}} H + \sum_{i=4}^8 \omega_i p_i + J_2 R^2 n^2 \xi^3 P_{20}(\sin \phi) - C_{22} R^2 n^2 \xi^3 P_{22}(\sin \phi) \cos(2\lambda) + \gamma d_{\oplus \mathbb{C}}^3 r_{\oplus}^{-3} a^2 \xi^{-2} P_{20}(\cos \alpha) \quad (10.3)$$

Cet Hamiltonien a bien les dimensions d'une énergie  $[km^2/j^2]$ , mais il s'agit précisément de la mettre en évidence ; nous mettrons en évidence la grandeur caractéristique qui s'impose d'elle-même :

$$n_N^2 R^2 \quad (10.4)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{H}}{n_N^2 R^2} = & -\frac{1}{2} \left( \frac{\mu}{n_N^2 R^3} \right)^2 \left( \frac{n_N R^2}{L} \right)^2 - \left( \frac{n_{\mathbb{C}}}{n_N} \right) \left( \frac{H}{n_N R^2} \right) + \sum_{i=4}^8 \left( \frac{\omega_i}{n_N} \right) \left( \frac{p_i}{n_N R^2} \right) \\ & + J_2 \left( \frac{n}{n_N} \right)^2 \xi^3 P_{20}(\sin \phi) - C_{22} \left( \frac{n}{n_N} \right)^2 \xi^3 P_{22}(\sin \phi) \cos(2\lambda) \\ & + \left( \frac{\gamma}{n_N^2} \right) \left( \frac{a}{R} \right)^2 \left( \frac{d_{\oplus \mathbb{C}}}{r_{\oplus}} \right)^3 \xi^{-2} P_{20}(\cos \alpha) \quad (10.5) \end{aligned}$$

ce qui montre bien que la variable  $a$  est dorénavant exprimée en unités  $R$ , tandis que les fréquences  $(n, n_{\mathbb{C}}, \omega_i)$  sont en unités  $n_N$ . En particulier, la fréquence du mois lunaire vaut à présent :

$$n_{\mathbb{C}} = 0.229\,971 \text{ rad/j} / n_N = 4.023 \times 10^{-3} [n_N] \quad (10.6)$$

avec  $\omega_i \approx n_{\mathbb{C}}$  (sauf  $\omega_6$ ) ; on a donc aussi :

$$\gamma_N = -0.052\,14 \text{ rad/j}^2 / n_N^2 = -1.596 \times 10^{-5} [n_N^2] \quad (10.7)$$

Par ailleurs, comme nous l'avons vu en (8.26), il est normal d'avoir  $\gamma$  en  $n_N^2$ . Les autres quantités suivent :  $\mu$  en  $n_N^2 R^3$  et les moments  $(L, G, H, p_i)$  en  $n_N R^2$ . On a par exemple  $\mu = 2.137 n_N^2 R^3$  et  $H = 1.659 n_N R^2$ . On constate que ces variables sont à présent de l'ordre de l'unité, tandis qu'auparavant elles renfermaient un ordre de grandeur.

Par souci de lisibilité, nous reprendrons toutefois les anciennes notations, en gardant à l'idée que tout est dorénavant exprimé dans les unités  $n_N$  et  $R$ . Il ne faudra pas oublier de multiplier les membres de droite  $\partial \mathcal{H} / \partial x$  des équations différentielles par le facteur  $n_N$ .

Plusieurs variables contiennent encore un ordre de grandeur caché :  $n_{\mathbb{C}}$  (10.6),  $\gamma$

(10.7)  $J_2$  et  $C_{22}$ . Nous les forçons également à être de l'ordre de l'unité en choisissant les valeurs nominales suivantes :

$$\begin{aligned} n_{\mathbb{Q}N} &= 4.023 \times 10^{-3} [n_N] \\ \gamma_N &= -1.596 \times 10^{-5} [n_N^2] \\ J_{2N} &= 2.032 \times 10^{-4} \\ C_{22N} &= 2.236 \times 10^{-5} \end{aligned} \quad (10.8)$$

de sorte que l'on redéfinit de nouveaux paramètres de perturbation non dimensionnels :

$$\begin{aligned} \bar{n}_{\mathbb{Q}} &= n_{\mathbb{Q}}/n_{\mathbb{Q}N} \\ \bar{\gamma} &= \gamma/\gamma_N \\ \bar{\epsilon} &= J_2/J_{2N} \\ \bar{\delta} &= C_{22}/C_{22N} \end{aligned} \quad (10.9)$$

notons que les  $\omega_i$  ne posent pas de problème puisqu'ils ne sont pas stockés dans des variables, mais qu'ils sont directement considérés comme des coefficients numériques.

Tout ce travail de normalisation est le garant du fait que l'ordre de grandeur transparaîtra effectivement explicitement via le coefficient numérique, et non plus dans des variables cachées.

## 10.2 Triangle de Lie numérique et Hamiltonien moyennisé

On considérera dès lors le Triangle de Lie numérique annoncé à la Table 3.2.

Nous avons fait différents essais pour trouver le bon niveau de précision, qui réside en un compromis entre la précision de la théorie et le nombre de termes. La conclusion était que le niveau de précision le meilleur était  $10^{-8}$ , ce que nous avons fixé.

Lors de l'intégration, un terme du genre

$$\delta n_{\mathbb{Q}} \sin(2h) n s^2 \phi / \eta^3 \quad (10.10)$$

apparaît à l'ordre 3, et d'autres du même genre (en  $\phi$ ) apparaissent aussi à l'ordre 4, mais on a vérifié qu'ils ne posaient pas de problème : ils n'apportent pas de contribution à l'Hamiltonien moyen. La routine `PRODUCT` s'est avérée très efficace lors des nombreux calculs.

Nous donnons à la Figure 10.1 une idée de la répartition du nombre de termes dans l'Hamiltonien moyen en fonction de l'ordre. Les 164 termes de l'Hamiltonien moyennisé une fois  $\tilde{\mathcal{H}}$  sont donnés à l'Annexe E et sont triés par coefficient ; ce qui permet de repérer les différents couplages et leurs ordres de grandeur. Le couplage automatique des perturbations constitue sans conteste un aspect original de cette thèse.

Nous avons déjà illustré partiellement au Chapitre 9 comment notre théorie moyenne était bien représentative du mouvement osculateur. La précision du processus de moyennisation a été vérifiée de la façon suivante : d'une part on a intégré l'Hamiltonien osculateur, et d'autre part on a intégré l'Hamiltonien moyen, et ensuite transformé les quantités moyennes en quantités osculatrices. Ensuite nous

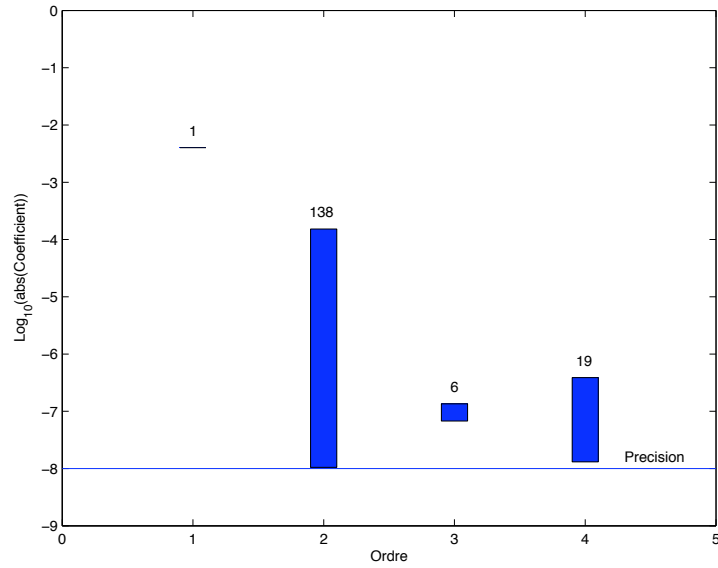
avons tracé la différence entre ces deux valeurs ; la Figure 10.2 montre la différence en excentricité  $e$ . On constate que la précision est tout à fait honorable et suffit aux besoins de cette thèse.

### 10.3 Conclusion

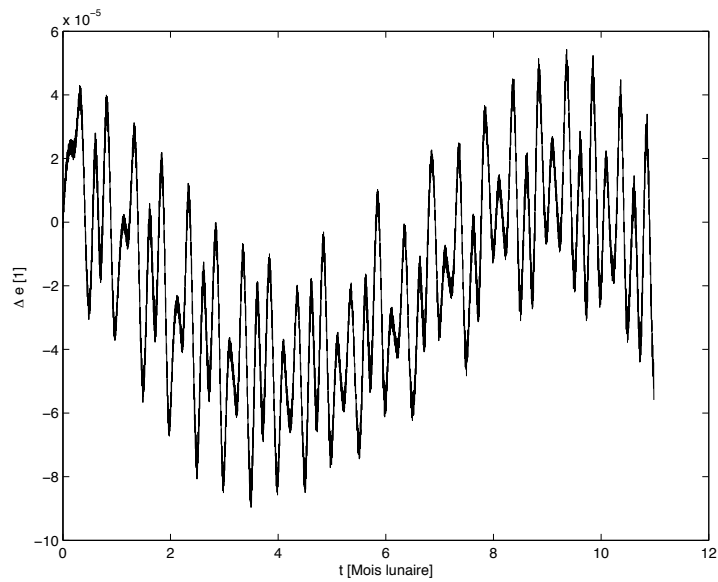
Nous sommes parvenus à un Hamiltonien moyennisé sur l'anomalie moyenne du satellite, qui est de bonne qualité et de taille gérable.

La façon automatisée dont nous avons conçu notre programme permet de sortir très rapidement de nouvelles séries qui correspondent aux souhaits plus particuliers de l'utilisateur : une altitude nominale différente ou une précision différente.

A présent nous procédons à la seconde moyennisation afin d'aboutir à l'analyse de mission, notre but ultime.



**FIG. 10.1** – Répartition du nombre de termes dans l'Hamiltonien moyen  $\bar{\mathcal{H}}$  en fonction de l'ordre. La précision est de  $10^{-8}$ .



**FIG. 10.2** – Précision de la première moyennisation : différence entre l'excentricité osculatrice et l'excentricité moyenne transformée.





# Chapitre 11

## Conclusions de la partie II

Lors de l'élimination de l'anomalie moyenne  $l$  du satellite, nous avons rencontré toute une foule de fonctions  $\mathcal{H}$  à intégrer. Nous avons surmonté les écueils de l'intégration, et également les nombreux problèmes de simplification.

Nous donnons à l'Annexe G quelques valeurs moyennes  $\bar{\mathcal{H}}$  et générateurs associés  $\mathcal{W}$  très utiles, avec des références bibliographiques. On peut en trouver d'autres dans la littérature, comme p.ex. dans [Métris, 1991]. Il y a typiquement deux types de données :

1. des fonctions  $\mathcal{H}$  particulières,
2. des classes de fonctions  $\mathcal{H}$ .

Les deux ayant leur utilité, nous les avons rassemblées dans l'Annexe G.

Le traitement de classes de fonctions permet un traitement automatisé mais génère souvent plus de termes que si l'on avait fait l'intégration via une méthode plus spécifique. Cela nous a amené à implémenter de nombreuses routines d'intégration, des deux genres (spécifiques et génériques).

Nous donnons à la Table 11.1 un aperçu des routines d'intégration et quel type de fonction elles permettent d'intégrer. Toutes ces routines ont subi des vérifications intensives, notamment grâce à [Métris, 1991, Kelly, 1989, Jefferys, 1971, Kozai, 1962a, Kozai, 1962b, Kozai, 1959, Tisserand, 1889]. L'algorithme de [Jefferys, 1971] s'est avéré particulièrement pertinent et utile.

TAB. 11.1: Liste des sous-routines de moyennisation du programme qui élimine l'anomalie moyenne  $l$  du satellite, par type de fonction à intégrer. La routine n'intègre que les termes de  $A$  qui vérifient toutes les conditions d'une même ligne. Le symbole  $\star$  signifie  $k \leq n + 1$  pour  $\xi^n \cos/\sin(kf)$ .  $(A,B,C) \equiv (\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}, \mathcal{W})$ .

$\begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix}$	$f$	$u$	$\xi$	$\phi$	$\psi$	$\ln(r)$	Sous-routine
sin	0	0	0	0	0	0	integMaple(A,B,C)
		0	$\geq 2$	0	0	0	integ(A,B,C)
	$\neq 0$	0	$\geq 2$	1	0	0	integfml(A,B,C)
	$\star k$		$\star n$	0	$>0$	0	integu(A,B,C)
			0	0	0	0	integJef(A,B,C)
$\delta n_{\mathcal{C}} \sin(2h) n s^2 \phi / \eta^3$							integfmlAlone03(A,B,C)
	0	0	0	1	0	0	integfmlAlone04(A,B,C)

Notons que l'ordre dans lequel on appelle les sous-routines d'intégration n'est pas innocent : il a été optimisé de façon à minimiser à la fois le nombre d'intégrations à effectuer (intégrations par partie, voir [Aksnes, 1971]) et le nombre de termes produits (une méthode d'intégration spécifique donne souvent moins de termes qu'une méthode plus générale).

Une liste des principaux programmes écrits durant cette thèse est donnée à la Table 11.2.

TAB. 11.2: Les principaux programmes écrits durant cette thèse.

Nom	Description	# lignes
<code>moona.f</code>	Première moyennisation (voir Partie II)	10 035
<code>eqdf.f90</code>	Intégration du triangle <i>symbolique</i> et dimensionnel	1 319
<code>eqdfnew.f90</code>	Intégration du triangle <i>numérique</i> et adimensionnel	1 794
<code>fractions_subs.f90</code>	Package de routines pour fractions exactes	1 379
<code>moonb.f</code>	Seconde moyennisation (voir Partie III)	9 602

Tous ces programmes sont en langage F77 (`.f`) ou F90 (`.f90`) et utilisent la syntaxe du manipulateur de séries MM. Des interactions soutenues avec le Prof. J. Henrard ont par ailleurs abouti à de nettes améliorations dans le MM dont principalement : plus de places pour les variables (voir Chapitre 4) et des calculs accélérés via la routine `PRODUCT`.

Nous avons entre autres inclu dans notre code les fonctionnalités optimales suivantes :

1. les intégrations sont automatiquement vérifiées (on vérifie que  $\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial l}$  redonne bien les termes que l'on a intégrés),
2. les résultats ont la forme la plus compacte possible.

Nous avons en effet couramment eu à manipuler un grand nombre de termes ; souvent de l'ordre de 10 000 termes, quelquefois 70 000. L'augmentation du nombre de termes avec l'ordre est exponentielle. Par exemple, si l'on ne prend que 10 termes pour  $\mathcal{H}_2^\gamma$ , à l'ordre 4 on est déjà confronté à 25 000 termes ! Avec l'entière des 200 termes pour  $\mathcal{H}_2^\gamma$ , certaines parenthèses de Poisson comportent (20 000 ; 5000) termes, ce qui est colossal — voire impraticable.

La minimisation du nombre de termes a été une contrainte et une préoccupation constantes. Il ne faut pas oublier que la théorie finale doit être facilement manipulable, c'est-à-dire de taille réduite. La définition de variables auxiliaires  $c_-$  et  $c_+$  a aidé à compacter les séries initiales, et donc in fine les résultats ( $\mathcal{H}_2^\gamma$  comporte 200 termes dans ces variables au lieu de 350 termes auparavant). Occasionnellement, nous avons également utilisé  $\beta$  à des fins de compactage.

Par ailleurs, il faut prendre garde à la redondance à l'intérieur des 3 sous-ensembles de variables  $(\xi, f, u, \phi, \psi)$ ,  $(c_+, c_-, s, c)$ , et  $(\eta^2, e^2, \beta)$ . Il faut veiller à ne pas tourner en rond dans le dédale des substitutions : il s'agit d'être très méthodique et systématique dans les opérations. C'est pourquoi nous avons abouti suite à de nombreux essais à l'algorithme suivant, qui nous semble optimal. La routine `ReduceNew` effectue dans l'ordre les opérations suivantes sur l'ensemble de la série à simplifier / compacter :

1. repérer les puissance extrémales négatives  $(-x, -y, -z)$  de  $\eta, e, s$  :  $\eta^{-x}, e^{-y}, s^{-z}$ ,
2. multiplier la série par le facteur  $(\eta^x e^y s^z)$  de façon à n'avoir que des puissances positives en ces variables,
3. *substitute*  $(\eta^{\geq 2}, s^{\geq 2}, c_+, c_-) \rightarrow (e, c)$  à l'aide des relations :  
 $\eta^2 = 1 - e^2, \quad s^2 = 1 - c^2, \quad c_+ = 1 + c, \quad c_- = 1 - c,$
4. *collect*  $(1 - e^2) \rightarrow \eta^2$  à  $\epsilon$  près,
5. tant que le nombre de termes se réduit, répéter l'opération 4. *collect*,
6. *collect*  $(1 - c^2) \rightarrow s^2$  à  $\epsilon$  près,
7. tant que le nombre de termes se réduit, répéter l'opération 6. *collect*,
8. *collect*  $(1 + c) \rightarrow c_+$  à  $\epsilon$  près,
9. tant que le nombre de termes se réduit, répéter l'opération 8. *collect*,
10. *collect*  $(1 - c) \rightarrow c_-$  à  $\epsilon$  près,
11. tant que le nombre de termes se réduit, répéter l'opération 10. *collect*,
12. multiplier la série par le facteur  $(\eta^{-x} e^{-y} s^{-z})$  afin de retrouver la série originale,
13. la forme obtenue est alors la plus simplifiée et la plus compacte.

Une liste complète des sous-routines du programme de la première moyennisation est donnée dans l'Annexe H. Le programme de la seconde est similaire, à la routine **IntegMonth** près, dont le principe sera décrit ci-après.



## Troisième partie

### MOYENNISATION DES MOYENNES PÉRIODES



# Chapitre 12

## Seconde moyennisation

Parmi les angles  $(l, g, h)$  du satellite lunaire, nous avons éliminé le premier  $(l)$ . On peut se demander quel angle est ensuite le plus rapide afin de l'éliminer à son tour :  $g$  ou  $h$  ? A priori, vu la définition (7.8), on sait que la fréquence de  $h$  est de l'ordre du mois. La fréquence de  $g$  devrait être inférieure. Pour en avoir le coeur net, nous reprenons l'Hamiltonien du problème complet du satellite artificiel lunaire considéré au §9.2, qui est bien représentatif, et nous en dérivons les quantités  $\dot{g}$  et  $\dot{h}$ . Nous en traçons ensuite la dépendance en  $(h, i)$  aux Figures 12.1 et 12.2. On constate que c'est bien  $h$  qui est l'angle rapide et qu'il s'agit donc de l'éliminer, et avec lui toutes les périodes de l'ordre du mois.

Par ailleurs, la courbe  $\dot{g} = 0$  qui donne l'inclinaison critique dans le cas du problème complet fait penser à celle de la Figure 9.1 (effet de  $J_2 + C_{22}$  seulement), bien qu'elle soit assez différente : la courbure est inversée.

La seconde moyennisation pose beaucoup moins de problèmes que la première.

Comme l'anomalie moyenne du satellite  $l$  a été éliminée, on a que  $\bar{L} = \text{cst}$ . On peut dès lors retirer la partie centrale :

$$\bar{\mathcal{H}}_0^{(0)} = \frac{\mu^2}{2\bar{L}^2} \quad (12.1)$$

qui est un terme constant inutile. Par ailleurs, on peut procéder à une normalisation<sup>1</sup> des coefficients les plus gros qui sont en effet de l'ordre de  $n_{\mathbb{Q}N}$ , ce qui donne :

$$\mathcal{K} = \frac{\bar{\mathcal{H}} - \bar{\mathcal{H}}_0^{(0)}}{n_{\mathbb{Q}N}} = \frac{\sum_{i=1}^4 \frac{\bar{\mathcal{H}}_0^{(i)}}{i!}}{n_{\mathbb{Q}N}} = \mathcal{K}_0^{(0)} + \mathcal{K}_1^{(0)} + \dots \quad (12.2)$$

avec

$$\mathcal{K}_0^{(0)} = \frac{\bar{\mathcal{H}}_0^{(1)}}{n_{\mathbb{Q}N}} = \frac{-n_{\mathbb{Q}}\bar{H} + \sum_{i=4}^8 \omega_i \bar{p}_i}{n_{\mathbb{Q}N}} \quad (12.3)$$

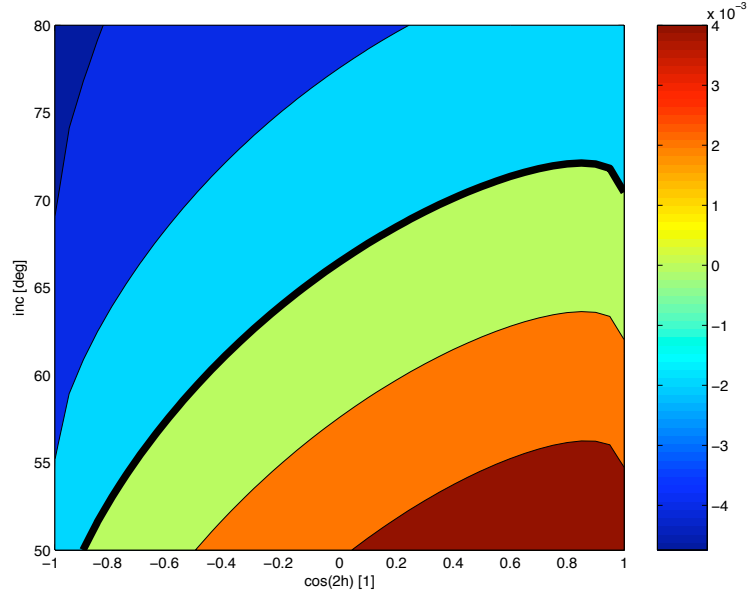
qui est à nouveau d'ordre 1, et le reste rassemblé comme une perturbation du premier ordre :

$$\mathcal{K}_1^{(0)} = \frac{\sum_{i=2}^4 \frac{\bar{\mathcal{H}}_0^{(i)}}{i!}}{n_{\mathbb{Q}N}} \quad (12.4)$$

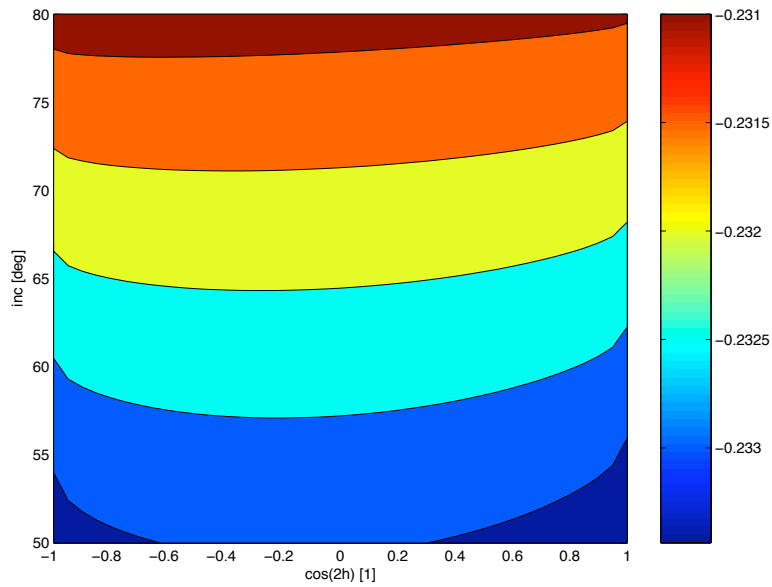
---

<sup>1</sup>Il faudra à nouveau appliquer ce facteur aux membres de droite des équations différentielles ;





**FIG. 12.1** – Fréquence [rad/j] de l'argument du péricentre  $g$  de l'orbite du satellite lunaire pour des conditions initiales  $(h, i)$  variables.



**FIG. 12.2** – Fréquence [rad/j] de la longitude du nœud ascendant  $h$  de l'orbite du satellite lunaire pour des conditions initiales  $(h, i)$  variables. La fréquence est environ celle du mois lunaire.

On applique ensuite à nouveau l'algorithme de Lie décrit à la Table 3.2. Le noyau de la Transformée de Lie comprenant à présent les moments  $\bar{H}$  et  $\bar{p}_i$ , il faudra à chaque ordre intégrer partiellement par rapport aux angles correspondants.

Considérons un des termes que nous avons à intégrer ; il est du genre :

$$T = \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} \left[ \sum_{i=2}^8 k_i q_i \right] \times \dots \quad . \quad (12.5)$$

Nous devons alors vérifier la combinaison de fréquences suivante :

$$\sigma = \sum_{i=3}^8 k_i \omega_i \quad (12.6)$$

où  $\omega_6$  est petit et où l'on a prêté attention au fait que  $k_3 \leq 0$  à cause du signe moins dans le terme  $-n_{\mathcal{Q}} \bar{H}$ .

Pour savoir si ce terme est quasiment constant, il faut effectuer le test suivant :

$$\left| \frac{\sigma}{n_{\mathcal{Q}N}} \right| < \frac{1}{10} \quad . \quad (12.7)$$

Si ce test est vrai, cela signifie que le terme est quasiment constant à l'échelle du mois : nous le mettrons donc dans  $\bar{\mathcal{K}}_0^{(1)}$ . Par contre s'il est faux, il convient alors de le mettre dans le générateur en l'intégrant de la façon suivante :

$$T = \frac{n_{\mathcal{Q}N}}{\sigma} \times \left\{ \begin{smallmatrix} \sin \\ -\cos \end{smallmatrix} \right\} \left[ \sum_{i=2}^8 k_i q_i \right] \times \dots \quad . \quad (12.8)$$

Nous avons fixé cette fois la précision à  $2 \times 10^{-6}$ , ce qui correspond à la précision de  $1 \times 10^{-8}$  pour la première moyennisation, à cause de la normalisation en  $n_{\mathcal{Q}N}$ .

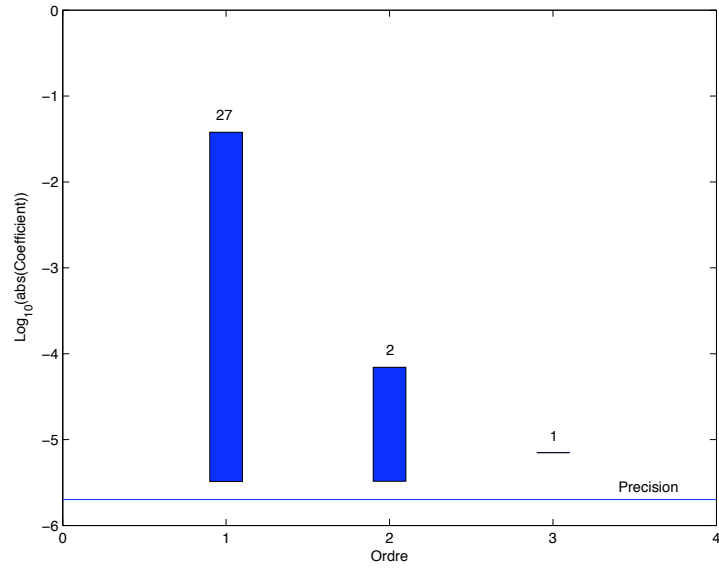
Nous donnons à la Figure 12.3 une idée de la répartition du nombre de termes dans l'Hamiltonien moyennisé deux fois  $\bar{\mathcal{H}}$  en fonction de l'ordre : cela converge rapidement et il y a peu de termes : 30 en tout. Ils sont donnés à l'Annexe E et sont triés par coefficient ; ce qui permet à nouveau de repérer les différents couplages et leurs ordres de grandeur. Il comprend 19 termes indépendant des angles, 7 termes du genre  $\cos(2g)$ , et les 4 termes restant sont de la forme :

$$\cos(h - \lambda_{\mathcal{Q}} + l_{\mathcal{Q}} + F), \cos(2g + h - \lambda_{\mathcal{Q}} + l_{\mathcal{Q}} + F) \text{ et } \cos(2g - (h - \lambda_{\mathcal{Q}} + l_{\mathcal{Q}} + F)) \quad . \quad (12.9)$$

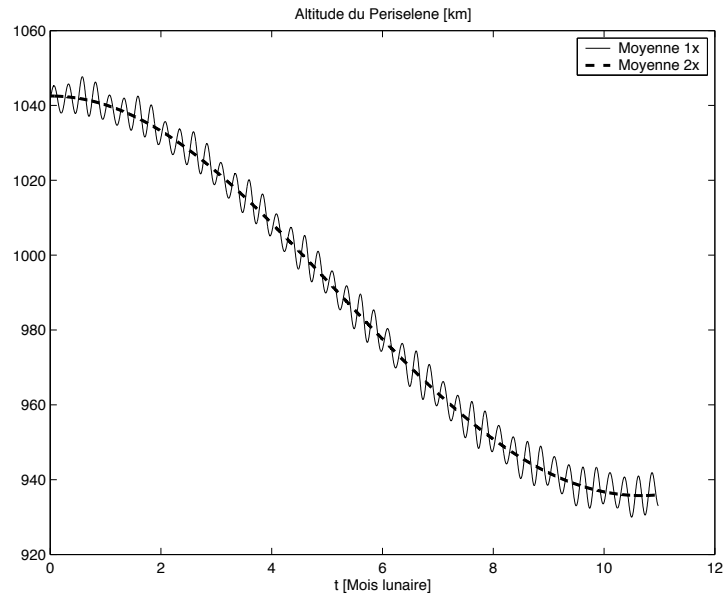
Nous illustrons ensuite l'allure de la seconde moyennisation par la Figure 12.4 : on constate qu'elle est raisonnable puisque visiblement bien centrée sur la première moyennisation.

Nous avons à nouveau vérifié la précision du processus de moyennisation de la même façon que précédemment. Le résultat est donné à la Figure 12.5, qui montre la différence en excentricité  $e$ . On constate à nouveau que la précision est tout à fait acceptable par rapport à la norme de  $10^{-3}$  que nous nous étions fixée au départ.

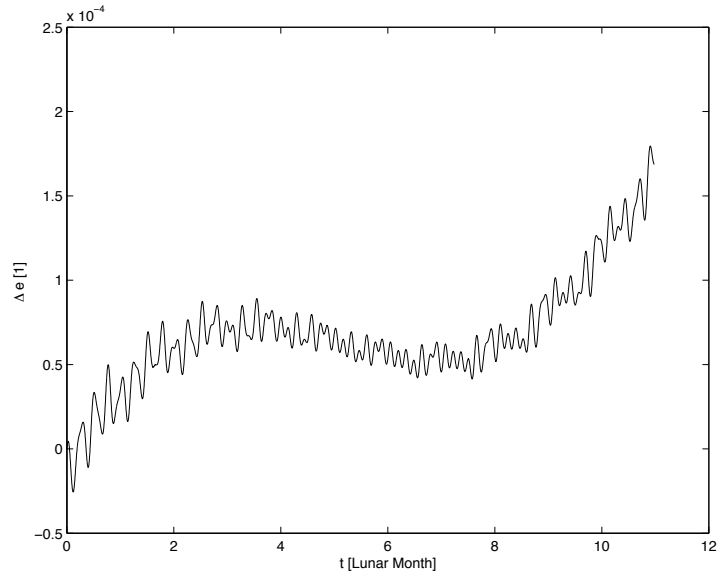
Nous avons également fait des essais pour améliorer la précision, en allant aux ordres supérieurs (voir Figure 12.6, où l'on est allé à l'ordre 6 pour atteindre une précision de  $1 \times 10^{-8}$ ), mais cela n'a pas vraiment apporté d'information supplémentaire ; par contre la taille des séries est devenu assez conséquente : nous avons choisi de conserver la précision de  $2 \times 10^{-6}$  in fine.



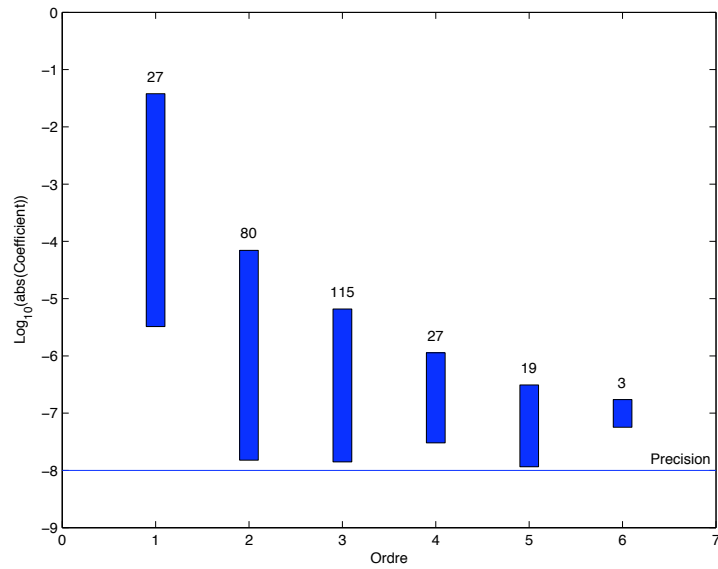
**FIG. 12.3** – Répartition du nombre de termes dans l'Hamiltonien moyennisé 2 fois  $\bar{\mathcal{H}}$  en fonction de l'ordre. La précision est de  $2 \times 10^{-6}$ .



**FIG. 12.4** – Altitude périséle [km] : système moyennisé 1 fois et système moyennisé 2 fois.



**FIG. 12.5** – Précision de la seconde moyennisation : différence entre l'excentricité moyenne moyenne  $\bar{e}$  et l'excentricité moyenne transformée  $\mathcal{L}(\bar{e})$ .



**FIG. 12.6** – Répartition du nombre de termes dans l'Hamiltonien moyennisé 2 fois  $\bar{\mathcal{H}}$  en fonction de l'ordre. La précision est de  $1 \times 10^{-8}$ .



## Chapitre 13

### Exploitation finale de la théorie : analyse paramétrique

Une fois le modèle moyen moyen  $\bar{\mathcal{H}}$  disponible, nous l'avons exploité intensivement. Tout d'abord par quelques essais manuels afin d'explorer les pas de temps et les tolérances, et ensuite pour cibler les points intéressants quant à la dynamique du satellite lunaire dans le cadre de l'analyse de mission, et donc viser juste pour l'exploitation finale.

Nous récoltons les fruits classiques d'une théorie analytique : nous pouvons intégrer avec des pas de temps  $\delta t$  significativement plus grands. L'ordre de grandeur pour  $\delta t$  est de 5 j pour  $\bar{\mathcal{H}}$ , tandis qu'il est 100 fois plus petit pour  $\mathcal{H}$ , et encore un autre facteur 100 plus petit pour  $\mathcal{H}$ . On gagne donc un facteur 10 000 en ce qui concerne le pas de temps. Par ailleurs, les séries à intégrer comprennent 2 à 7 fois moins de termes, ce qui donne au final un rapport global d'environ 200 000 entre la vitesse d'intégration de  $\mathcal{H}$  et celle de  $\bar{\mathcal{H}}$  ! Cela est illustré à la Table 13.1, où nous avons également repris le cas annexe  $\bar{\bar{\mathcal{H}}}$  plus précis d'ordre 6, mais le nombre de termes redevient dans ce cas exorbitant et on reperd un facteur 15.

TAB. 13.1: Nombre de termes et vitesse d'intégration pour les systèmes osculateur, moyennisé une fois, et moyennisé deux fois.

	Ordre	$\epsilon$	$\mathcal{H}$	$\dot{l}$	$\dot{g}$	$\dot{h}$	$\dot{L}$	$\dot{G}$	$\dot{H}$	Somme	Rapport	$\delta t$
$\mathcal{H}$	4	$10^{-8}$	207	732	761	237	522	114	132	2498	/ 929 = 2.69	$5.10^{-4}$ j
$\bar{\mathcal{H}}$	4	$10^{-8}$	164	221	337	204	0	63	104	929	/ 138 = 6.73	$5.10^{-2}$ j
$\bar{\bar{\mathcal{H}}}$	3	$2.10^{-6}$	30	38	50	37	0	9	4	138		$5.10^0$ j
$\bar{\bar{\mathcal{H}}}$	6	$10^{-8}$	271	429	577	360	0	160	149	1675	/ 138 = 12.1	$5.10^0$ j

L'étude paramétrique initiale promettait d'être longue à première vue : nous avons beaucoup de paramètres qui peuvent affecter les résultats : tout d'abord les conditions initiales  $(l_0, g_0, h_0, a_0, e_0, i_0)$ , leur intervalle de variation et leur discrétisation, mais aussi la durée sur laquelle on intègre, la tolérance, le pas de temps  $\delta t$  et finalement les quantités à analyser.

Il fallait bien dès lors fixer quelques constantes. Après quelques brefs tâtonnements, nous avons fixé tout d'abord la tolérance de l'intégrateur à  $10^{-6}$ , ce qui donnait une précision suffisante. Nous avons ensuite choisi comme durée la durée

typique d'une mission lunaire : 2 ans. Le pas de temps a été pris à égal à  $\delta t = 5$  j.

Quant aux quantités à analyser, l'altitude minimale du satellite au-dessus du sol lunaire s'imposait tout naturellement, ainsi que la durée de vie orbitale du satellite. Ce sont précisément ces deux quantités qui sont dessinées aux Figures 13.1 et 13.2 respectivement, dans le plan  $(a, e)$  lui aussi assez naturel, où nous avons arbitrairement fait varier  $a \in [1R, 5R]$ . Le maillage de cet espace de phases  $(a, e)$  comporte  $50 \times 50$  points, soit quelques 2500 orbites par figure. L'ordre de grandeur du temps de calcul pour un tel graphe est de 12 minutes. La courbe en noir correspond à la surface lunaire. On voit que la durée de vie est au moins égale à 2 ans, et que pour ainsi dire aucun satellite ne s'écrase. Reste à voir l'effet des conditions initiales.

Nous donnons avant tout un aperçu de la démarche globale adoptée sur l'ensemble des simulations effectuées dans cette partie.

Nous nous doutons que l'effet de l'inclinaison sera primordial. Quelques études de débroussaillage mettent rapidement ce fait en évidence, et mieux encore : nous remarquons une symétrie par rapport à  $i = 90^\circ$ . Nous considérerons donc seulement  $i \in [0^\circ, 90^\circ]$ .

Comme nous avons moyennisé par rapport à  $l$  et à  $h$ , les résultats devraient en être indépendants. Nous l'avons toutefois vérifié en calculant les 64 combinaisons  $(l, g, h) \in \{0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ\}$ , avec une valeur moyenne de  $i = 45^\circ$ . C'est bien confirmé : nous ferons dès lors dorénavant les graphes pour  $(l, h) = (0, 0)$  et adopterons la notation  $(-, -)$ .

Nous avons choisi l'espace de phase  $(a, e)$  : il reste donc à considérer seulement l'effet de  $g \in [0^\circ, 360^\circ]$  et de  $i \in [0^\circ, 90^\circ]$ . Le  $g$  provient du fait que c'est un angle lent qui n'a pas été moyennisé contrairement au  $h$ . Après une petite prospection habituelle mais néanmoins déjà plus précise en  $i$ , nous choisissons les valeurs particulières  $i \in \{1^\circ, 45^\circ, 58^\circ, 90^\circ\}$ , qui semblent être les plus représentatives de la dynamique globale : ces valeurs donnent des résultats qualitativement différents. Et pour  $g$ , comme l'inconnue subsiste, nous le faisons évoluer par  $g = 0 + k \cdot 30^\circ, k \in \mathbb{N}$ , ce qui nous fait au total  $4 \times 12 = 48$  espaces des phases à analyser. Vu la sensibilité extrême vis-à-vis de l'inclinaison, nous avons fait une étude plus détaillée avec  $i = 0 + k \cdot 90/11^\circ, k = 1, 2, \dots, 11$ , et fixé  $g$  à  $0^\circ$  puis à  $90^\circ$ .

Avec cet ensemble, nous estimons avoir très bien couvert l'ensemble des orbites possibles.

Avant d'interpréter les résultats, rappelons qu'il faut les considérer avec les réserves liées aux approximations et aux choix qui ont été effectués jusqu'ici. Il faut en outre garder en tête que seules 4 perturbations (ainsi que leurs couplages) ont été prises en compte ; il est clair qu'aux altitudes élevées ( $a > 3.5R$ ), il s'agirait d'inclure l'effet du Soleil (voir Chapitre 2). Il ne faut pas oublier non plus que l'Hamiltonien  $\bar{\mathcal{H}}$  a été développé pour une altitude nominale de 500 km, et qu'en toute rigueur, il s'agirait de développer un Hamiltonien pour chaque altitude ; l'intérêt d'une description globale de l'espace de phase  $(a, e)$  aurait néanmoins alors été nettement réduit.

Interprétons à présent les résultats en eux-mêmes.

On constate tout d'abord que l'effet de  $g$  est nul dans le cas d'une orbite équatoriale ; c'est normal puisque le couplage qui fait croître l'excentricité intervient via l'inclinaison (voir (9.13)). C'est pourquoi nous n'avons mis qu'un seul graphe aux

Figures 13.1 et 13.2, et utilisé la notation  $(l, g, h, i) = (-, -, -, 1^\circ)$ .

Pour  $i > 0$ , on a reporté l'effet de  $g$  sur chacune des pages.

Pour  $i = 45^\circ$  (Figures 13.3 et 13.4), le périhélie maximum est atteint pour  $g = 90^\circ$ . La zone correspondant à une altitude nulle signifie que le satellite s'est écrasé sur le sol lunaire : on peut alors lire sa durée de vie sur l'autre graphe lui correspondant, dans la partie non rouge cette fois (durée de vie inférieure aux 2 ans d'intégration). Les deux vues sont donc fort complémentaires.

Pour  $i = 58^\circ$  (Figures 13.5 et 13.6), le périhélie maximum est atteint pour  $g = 150^\circ$ . Cette fois la dynamique semble bien prendre un sérieux tournant. La zone de durée de vie maximale n'est plus située en bas à droite, mais commence à être scindée en deux, par un véritable mur, en plus de la réduction verticale de la zone déjà constatée auparavant. On remarque l'apparition d'un trou entre 2 et 3 rayons lunaires pour  $a$ .

Pour  $i = 90^\circ$ , cas de l'orbite polaire, (Figures 13.7 et 13.8), c'est encore plus remarquable : cette fois il ne reste même plus deux zones de stabilité séparées par un mur, mais seulement une seule zone située à gauche, avec une limite supérieure vers  $a \approx 1.7R$ . Nous faisons immédiatement le lien avec l'étude préliminaire effectuée au Chapitre 9, en particulier la Figure 9.11 qui comporte également un mur à  $a \approx 1.7R$ . L'existence de ce dernier avait été attribué à l'effet déstabilisant de la Terre, ce qui est visiblement toujours le cas ici, mais nous en avons une description beaucoup plus globale maintenant. Nous n'avions en effet étudié qu'une mini-région ( $1/250^\circ$ ) d'un des espaces de phases : une dizaine de valeurs de  $a$  pour un  $e = 0.2$  et  $i = 90^\circ$ , ce qui est équivalent à scanner la zone de stabilité rouge le long d'un segment de droite horizontal. On constate aussi que l'effet de  $g$  n'est vraiment pas négligeable : l'allure de l'espace des phases est franchement différent : la zone de stabilité est étendue pour  $g = 210^\circ$ , tandis qu'elle est fortement réduite pour  $g = 180^\circ$ .

Nous terminons notre analyse par des graphes plus ciblés sur l'effet de l'inclinaison.

Les Figures 13.9 et 13.10 correspondent à  $g = 0^\circ$ . L'inclinaison a peu d'influence dans un premier temps, puis soudain (vers  $i \approx 45^\circ$ ) l'espace des phases change d'allure du tout au tout ; on distingue particulièrement bien le développement de la bosse de stabilité en bas à gauche.

Pour  $g = 90^\circ$  (Figures 13.11 et 13.12), c'est encore plus flagrant : il ne se passe rien jusqu'à  $i \approx 57^\circ$ , valeur à laquelle la zone de stabilité est véritablement mise en pièces.

Tâchons pour terminer d'estimer l'ampleur des simulations effectuées dans le cadre de cette analyse de mission. Nous estimons à environ 164 le nombre d'espaces de phases  $(a, e)$  calculés : environ 30 de tâtonnements, 64 pour vérifier l'indépendance vis-à-vis de  $(l, h)$ , 48 pour l'effet de  $g, i$ , et encore 22 autres pour affiner l'étude de l'effet de  $i$ . Comme il y a 2 500 orbites par espace de phase, nous avons donc intégré 410 000 orbites lunaires. A raison de 12 minutes en moyenne par espace de phase, cela fait donc un total de 33 heures de CPU (sur un PowerPC G4 1.25 GHz), ce qui est un ordre de grandeur tout à fait raisonnable pour une étude d'une telle ampleur. Avec le rapport de 200 000 évoqué supra, cela nous aurait fait au bas mot 7 siècles et demi d'intégration pour le système osculateur  $\mathcal{H}$  !

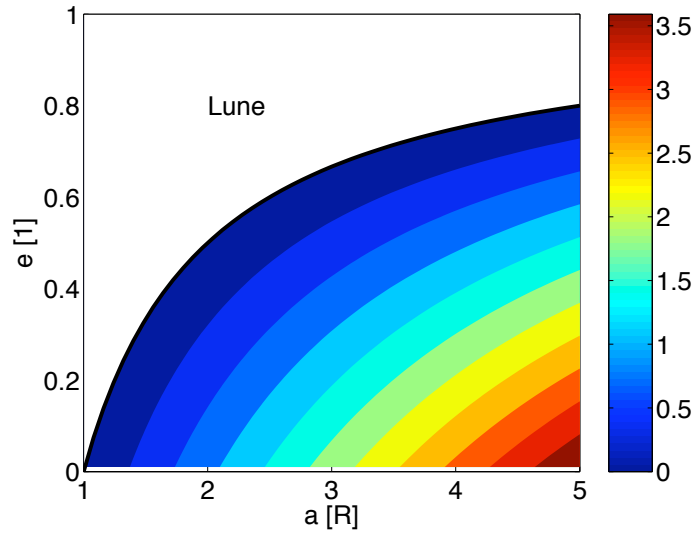
Bien entendu, une étude aussi extensive a exigé une automatisation de traitement



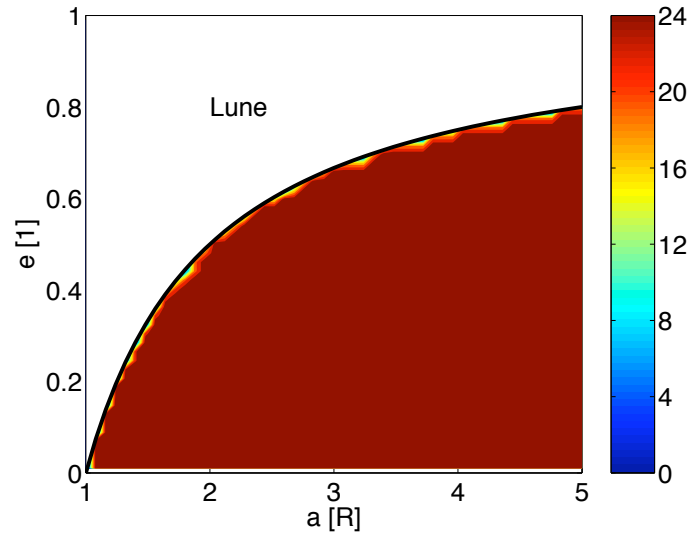
qui passe par de nombreux scripts afin de conduire plus facilement à la fois les calculs et leur analyse. Par ailleurs, même si le système moyen moyen  $\bar{\mathcal{H}}$  peut s'intégrer plus rapidement, il ne s'agit pas de gaspiller de temps non plus : le programme d'intégration a été optimisé à la fois pour arrêter l'intégration en cas de crash du satellite, et pour réduire localement automatiquement le pas de temps en cas de difficulté de convergence (typiquement quand  $e \rightarrow 1$ ). Il gère donc automatiquement l'intégration de l'ensemble de l'espace des phases.

En conclusion, nous pouvons dire que la dynamique du satellite lunaire n'est pas si simple que cela. Heureusement, les cartes globales que nous avons dressées donnent une excellente vue d'ensemble sur la dynamique, et un niveau de détails dans les phénomènes assez surprenant.

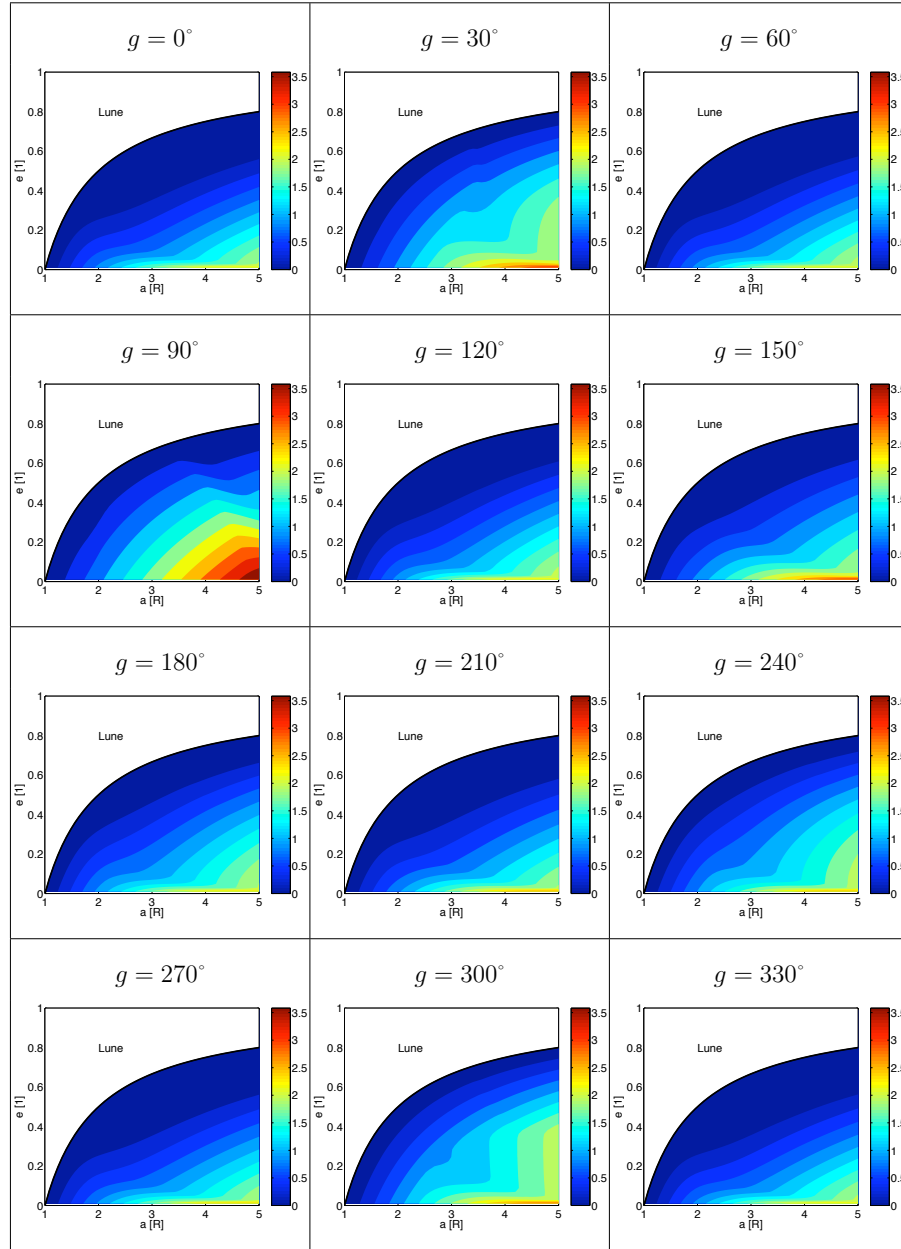
Notre théorie analytique constitue sans conteste un outil très précieux pour l'analyse de missions lunaires.



**FIG. 13.1** – Altitude périséélène minimale  $[R_{\ell}]$  pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, g, h, i) = (-, -, -, 1^\circ)$ . Dans le cas d'une orbite équatoriale, le résultat est indépendant de  $g$ .



**FIG. 13.2** – Durée de vie [Mois sidéral lunaire] pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, g, h, i) = (-, -, -, 1^\circ)$ . Dans le cas d'une orbite équatoriale, le résultat est indépendant de  $g$ .



**FIG. 13.3** – Effet de l'argument du péricentre  $g$  sur l'altitude périhélie minimale  $[R_{\ell}]$  pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, h, i) = (-, -, 45^\circ)$ .

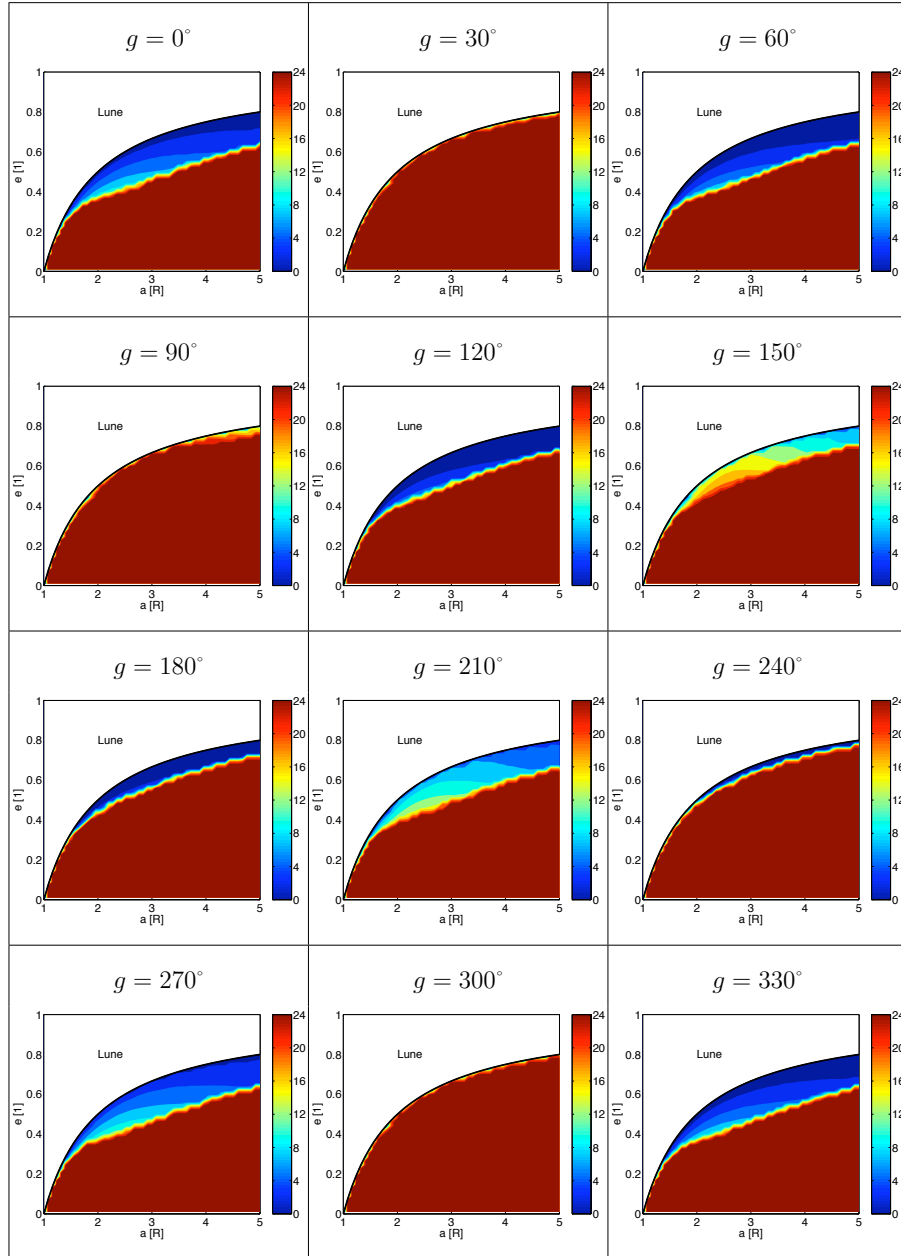
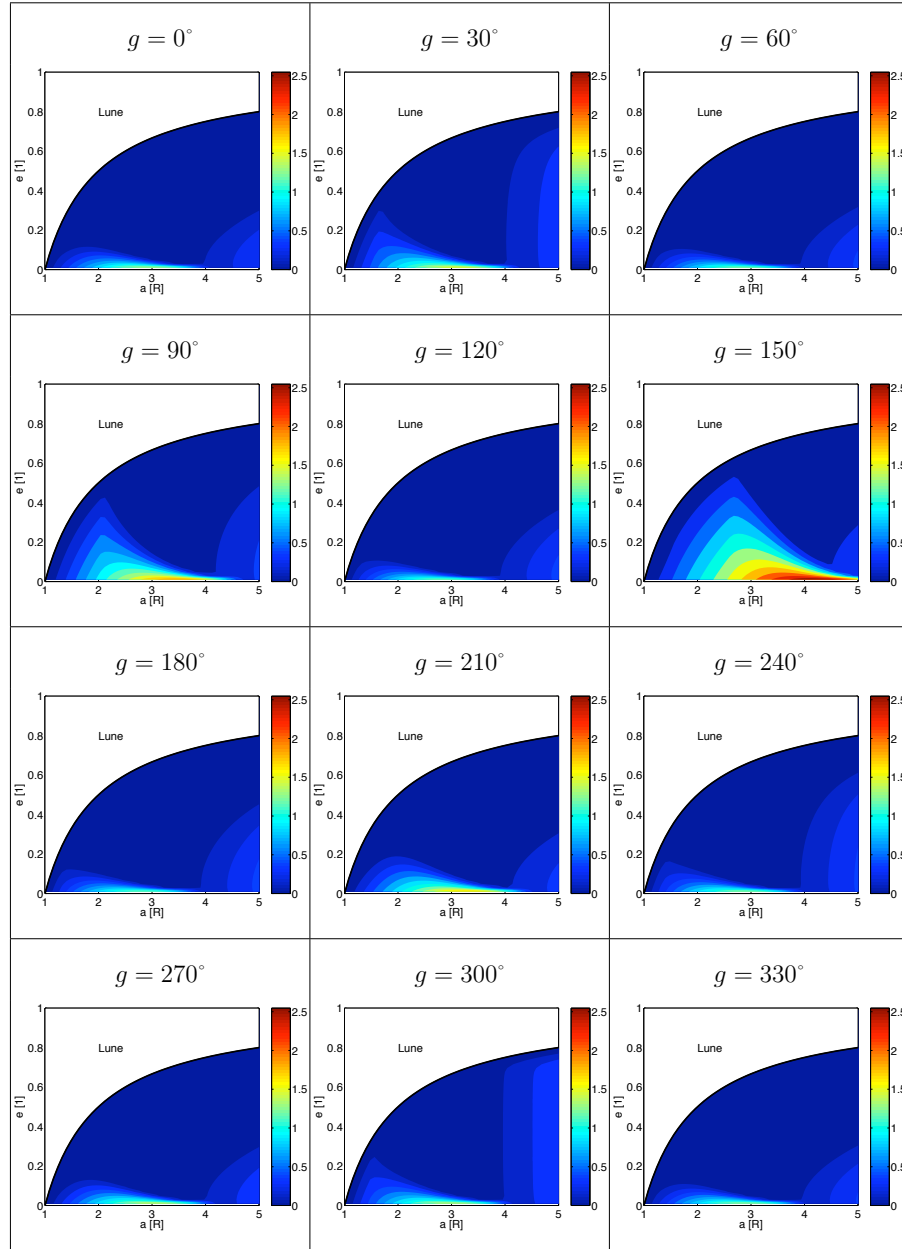


FIG. 13.4 – Effet de l'argument du péricentre  $g$  sur la durée de vie [Mois sidéral lunaire] pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, h, i) = (-, -, 45^\circ)$ .



**FIG. 13.5** – Effet de l'argument du péricentre  $g$  sur l'altitude périhélie minimale  $[R_{\ell}]$  pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, h, i) = (-, -, 58^\circ)$ .

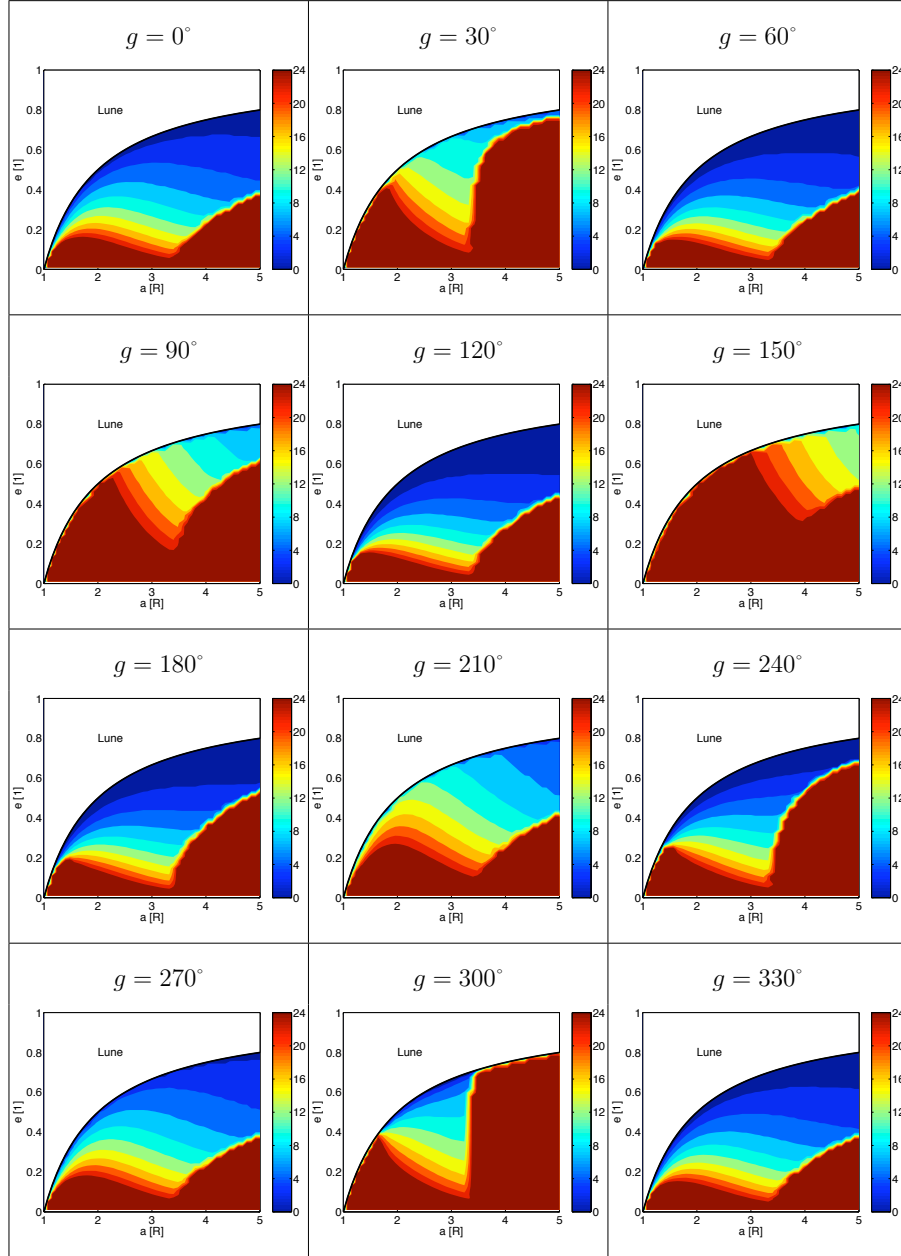
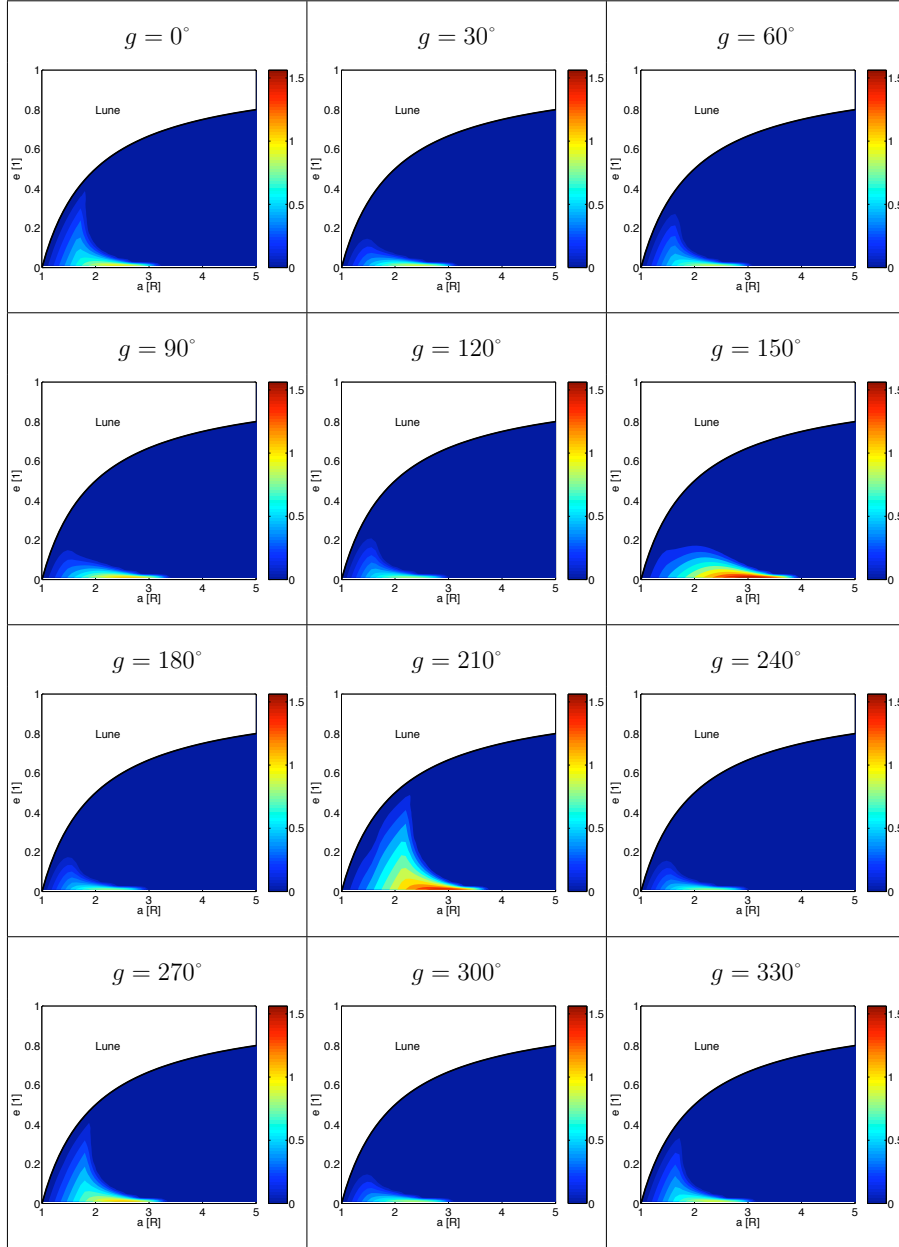


FIG. 13.6 – Effet de l'argument du péricentre  $g$  sur la durée de vie [Mois sidéral lunaire] pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, h, i) = (-, -, 58^\circ)$ .



**FIG. 13.7** – Effet de l'argument du péricentre  $g$  sur l'altitude périhéle minimale  $[R_{\ell}]$  pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, h, i) = (-, -, 90^\circ)$ .

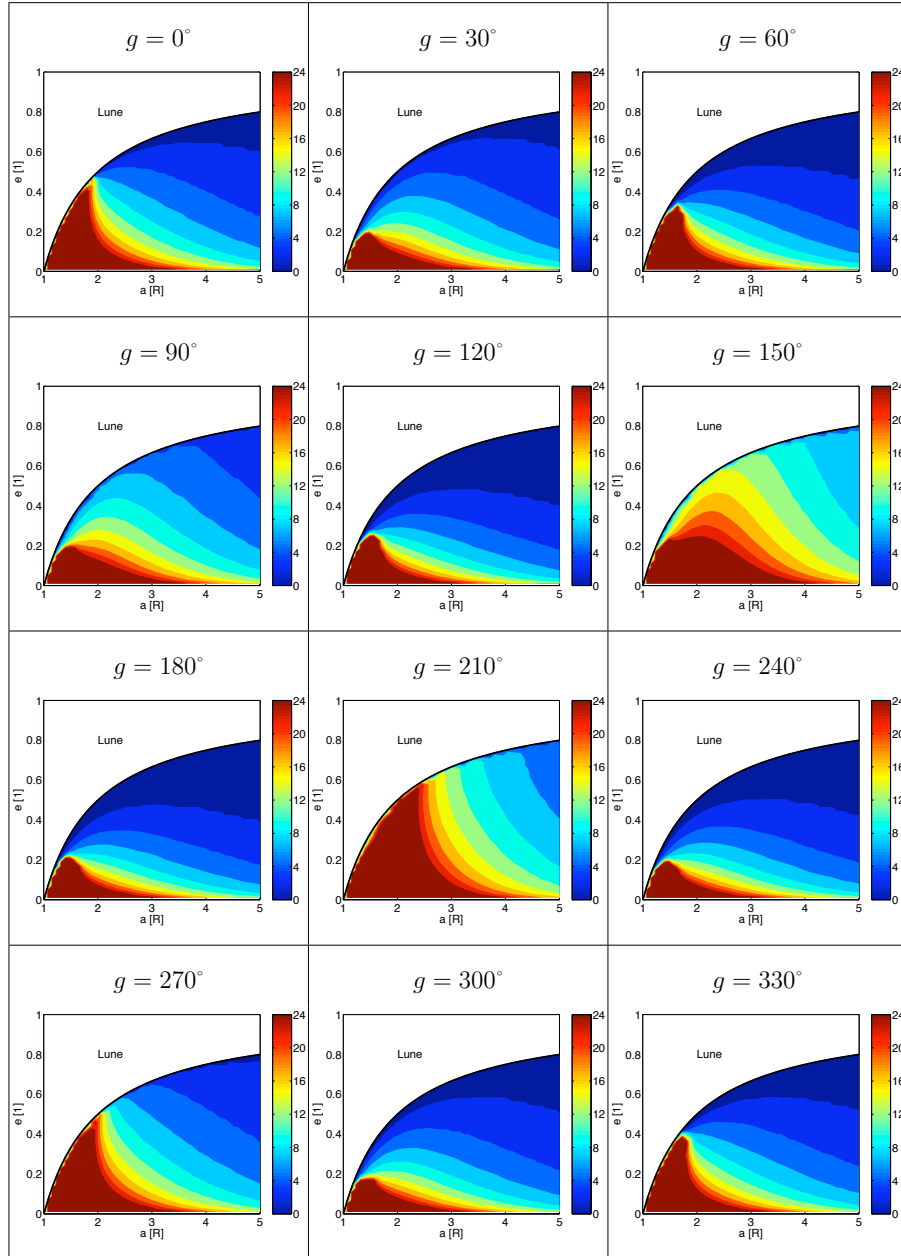


FIG. 13.8 – Effet de l'argument du péricentre  $g$  sur la durée de vie [Mois sidéral lunaire] pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, h, i) = (-, -, 90^\circ)$ .



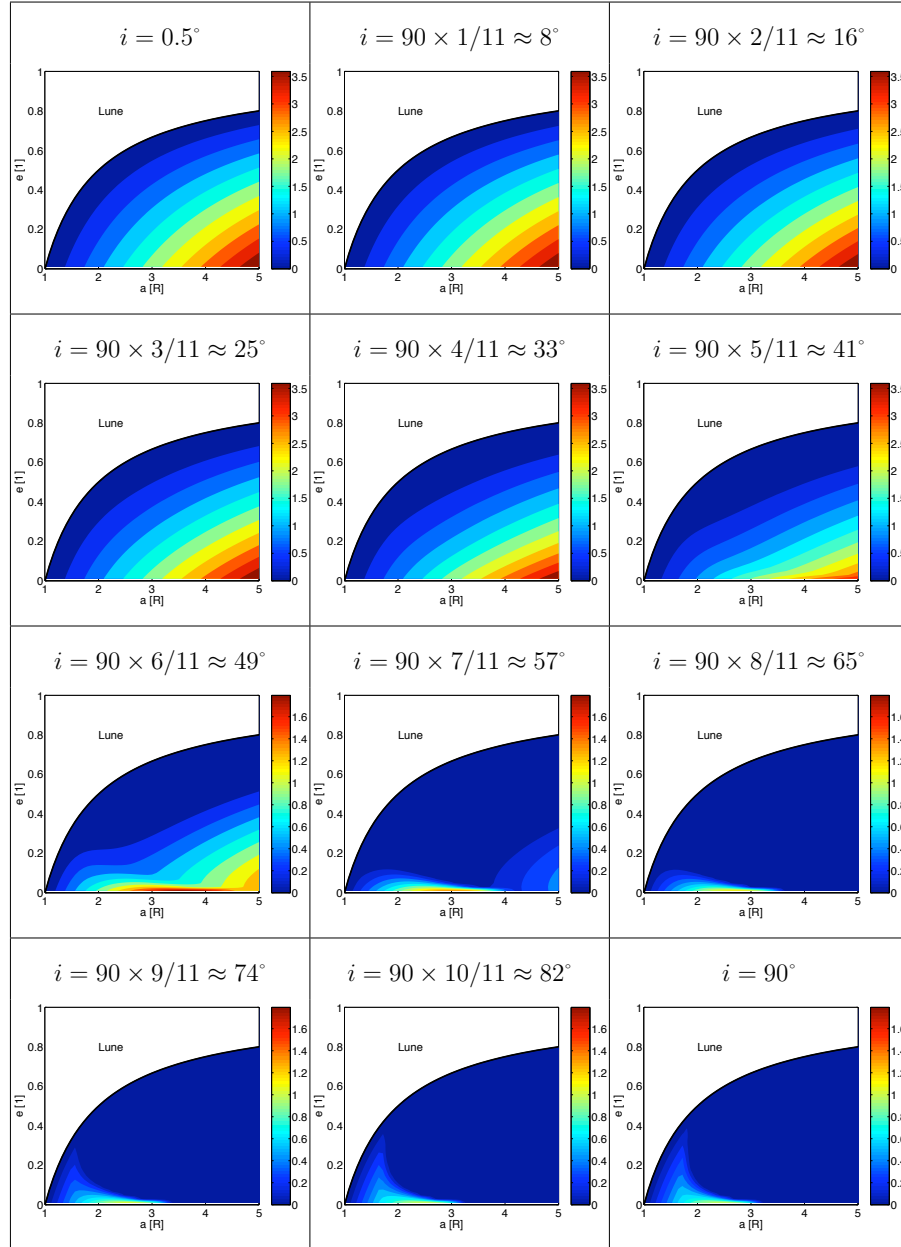


FIG. 13.9 – Effet de l'inclinaison  $i$  sur l'altitude péricélène minimale  $[R_d]$  pour des conditions initiales  $(a, e) = (-, 0^\circ, -)$ .

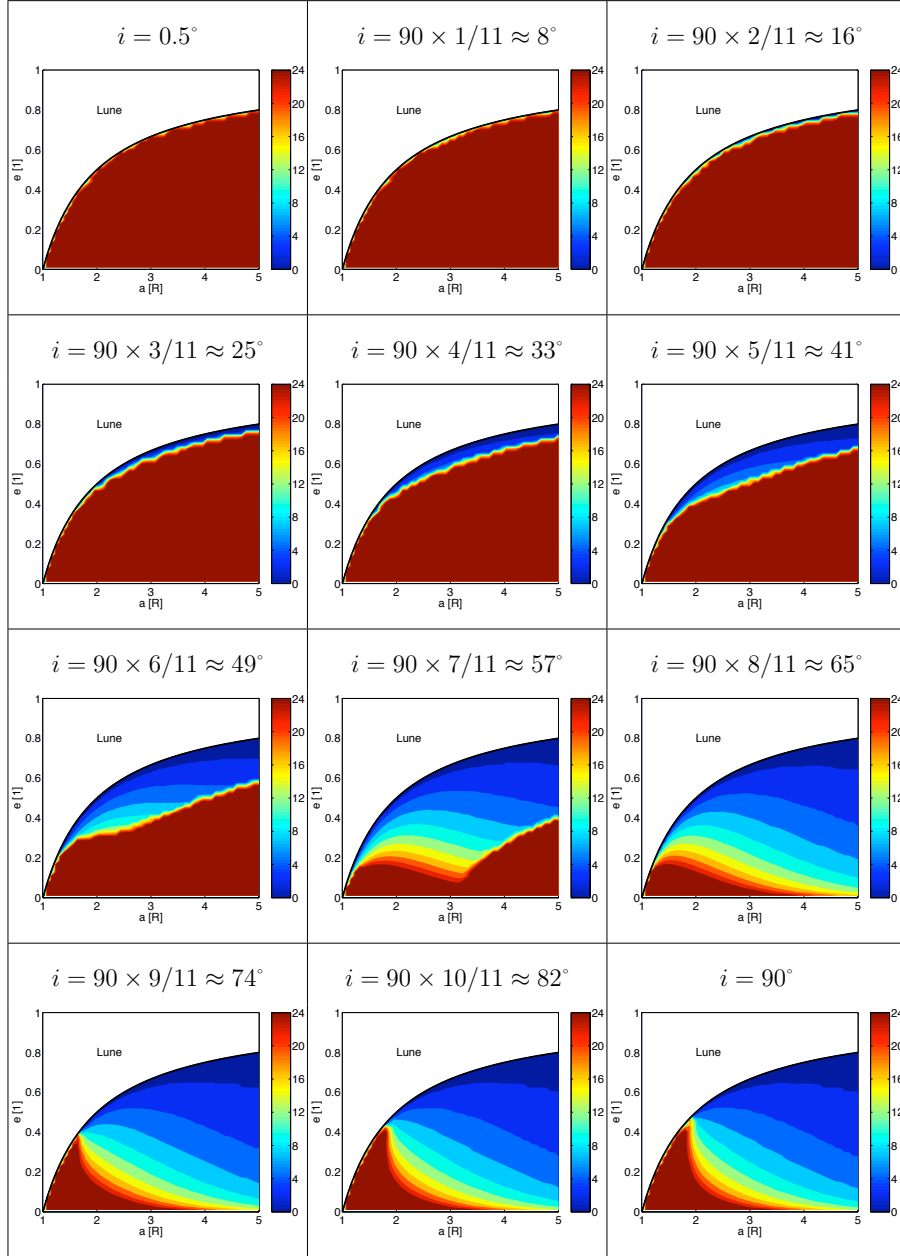


FIG. 13.10 – Effet de l'inclinaison  $i$  sur la durée de vie [Mois sidéral lunaire] pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, g, h) = (-, 0^\circ, -)$ .

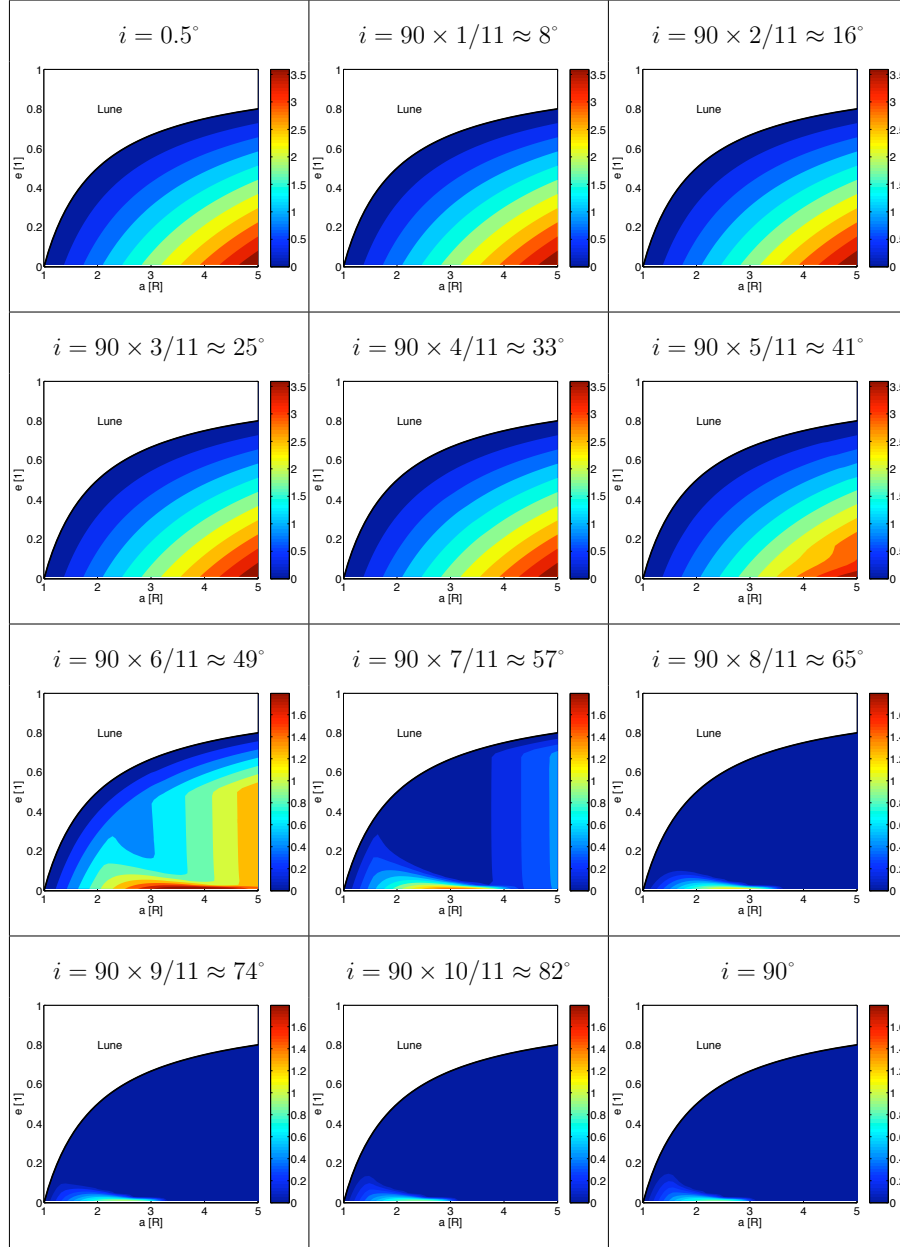


FIG. 13.11 – Effet de l'inclinaison  $i$  sur l'altitude péricélène minimale  $[R_d]$  pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, g, h) = (-90^\circ, -)$ .

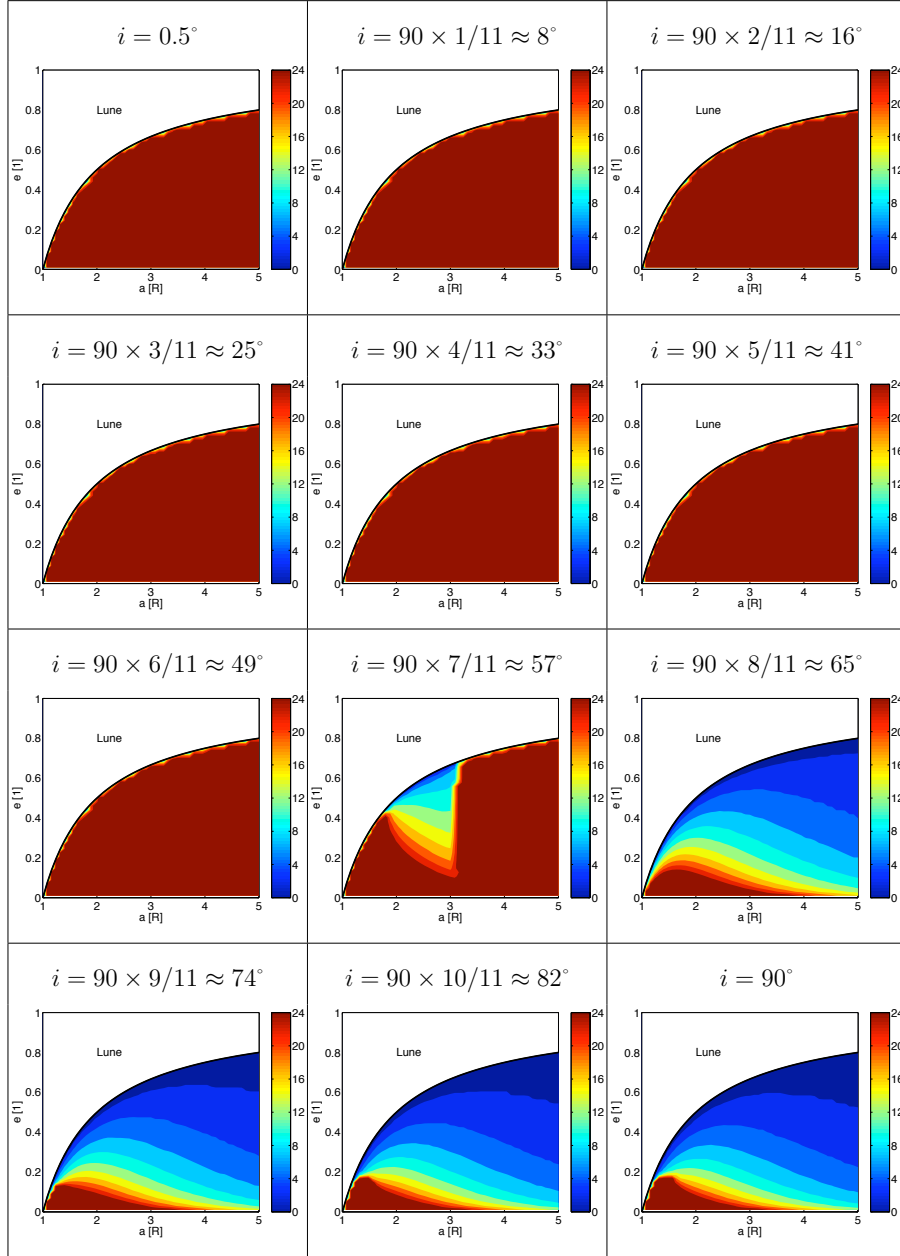


FIG. 13.12 – Effet de l'inclinaison  $i$  sur la durée de vie [Mois sidéral lunaire] pour des conditions initiales  $(a, e)$  variables et  $(l, g, h) = (-90^\circ, -)$ .



## Quatrième partie

### CONCLUSIONS & PERSPECTIVES



Dans ce travail, nous avons considéré les quatre perturbations majeures de natures différentes qui influencent la dynamique des satellites artificiels lunaires, et étudié leurs différents couplages de façon automatisée.

Nous avons utilisé la méthode des Transformées de Lie pour moyenniser deux fois l'Hamiltonien du problème, dans des variables canoniques, afin de développer notre théorie analytique. De nombreuses vérifications analytiques par rapport à la littérature ont été réalisées, et se sont avérées concluantes.

Grâce à notre théorie analytique, nous avons pu intégrer quelques 410 000 orbites lunaires en 33 heures de CPU seulement, tandis qu'il nous aurait fallu environ 7 siècles et demi d'intégration avec le système osculateur.

La solution est développée en puissance de petits paramètres liés aux différentes perturbations, et les couplages sont calculés automatiquement. Nous avons vérifié la qualité de nos deux intégrations.

Les résultats sont obtenus sous forme fermée, sans aucun développement en série de l'excentricité ni de l'inclinaison. La solution s'applique donc à une large gamme de valeurs, ce qui est parfait pour l'analyse de mission.

Nous avons effectué de nombreuses vérifications concluantes de notre théorie du satellite artificiel lunaire par rapport à la littérature.

Nous nous sommes également intéressés en cours de route à quelques problèmes annexes, auxquels nous avons apporté diverses contributions. Nous avons notamment résolu le problème zonal complet du satellite artificiel, étudié l'effet de  $C_{22}$  sur l'inclinaison critique et celui de la Terre sur les durées de vie limitées de certains satellites lunaires.

Nous avons par ailleurs développé pas mal d'outils ; nous avons entre autres apporté quelques améliorations significatives au manipulateur algébrique des FUNDP par la création de nombreuses routines et par l'ajout de fractions symboliques.

Une série de résultats extensifs, principalement des cartes inédites d'espaces de phase  $(a, i)$  a été générée.

Nous disposons donc à présent d'un outil efficace, souple et fiable pour l'analyse de mission, qui peut être utilisé intensivement dans ce but.

Il est prévu de rendre les résultats de cette thèse largement accessibles au public via Internet, et ce en 3 phases : i) les séries de la seconde moyennisation (très rapidement), ii) le calcul en ligne d'une orbite doublement moyennisée (à moyen terme) , et éventuellement iii) la génération d'espaces de phases particuliers.

Dans le futur, une étude plus détaillée de l'influence de certains paramètres (tels que l'inclinaison) sur le temps de vie orbitale du satellite serait sans doute un apport non négligeable.

La précision de la théorie pourrait éventuellement être améliorée en considérant d'autres perturbations plus fines, comme la précession du nœud lunaire de 18.6 ans. Mais ce n'est a priori pas un passage obligé, vu que la durée nominale des missions est habituellement plus courte, de l'ordre de 2 ans.

Il s'agirait certainement alors de prendre également en compte la pression de radiation solaire, qui influence l'excentricité, mais cela ne devrait pas poser de problème majeur.



On pourrait par contre plus judicieusement inclure l'effet des harmoniques sphériques suivants, tels que  $C_{31}$  et  $J_3$  (voire  $J_5$ ), qui influencent également l'excentricité [Meyer et al., 1994], surtout pour des orbites plus basses ; tandis que nous avons vu que  $J_2$  modifiait surtout  $g$  et  $h$ , et  $C_{22}$  surtout  $i$ . Concernant les ordres de grandeur, c'est  $C_{31}$  qui est prépondérant ( $C_{31}/J_2 \approx 0.14$ ) par rapport aux zonaux  $J_3$  à  $J_5$  ( $J_5/J_2 < (|J_4/J_2| \approx J_3/J_2) < 0.05$ ).

Pour des orbites plus hautes, il faudrait inclure l'effet du Soleil.

Nous avons donné l'explication mathématique de la hausse de l'excentricité du satellite sous l'effet du troisième corps ; il serait intéressant de pouvoir en donner aussi l'explication géométrique. De même pour l'effet de l'argument du péricentre  $g$ .

Un autre développement intéressant serait la confrontation de notre théorie avec des satellites lunaires réels, afin de s'assurer de la précision finale de notre théorie. Cette perspective est en phase de réalisation : nous avons déjà débroussaillé les données de satellites réels qui se prêteraient bien à une telle comparaison (voir Annexe J). L'ampleur de ce travail de comparaison détaillée est toutefois telle que cela sort de la tâche de cette thèse.

## ANNEXES



## Annexe A

### Quelques coefficients de modèles d'Harmoniques Sphériques

#### A.1 Modèle en harmoniques sphériques de degré $N = 16$ .

TABLE 2. Normalized Lunar Gravity Harmonics ( $\times 10^6$ )

$n$	$m$	$C_{nm}$	$S_{nm}$	$\sigma(C_{nm})$	$\sigma(S_{nm})$
2	0	-90.53		0.51	
2	1	-0.07	-0.00	0.00	0.00
2	2	34.49	0.03	0.20	0.01
3	0	-3.36		0.57	
3	1	21.96	6.63	1.04	1.19
3	2	14.14	4.76	0.14	0.11
3	3	15.87	-2.45	1.03	0.96
4	0	3.91		1.10	
4	1	-4.82	1.91	0.69	0.52
4	2	-8.13	-6.76	1.09	1.03
4	3	0.48	-14.43	0.96	0.91
4	4	-3.50	-0.55	1.23	1.23
5	0	-0.72		0.94	
5	1	-9.66	-1.53	1.47	1.57
5	2	3.71	-2.35	0.88	0.75
5	3	-0.39	4.91	1.33	1.32
5	4	0.56	-6.58	1.40	1.28
5	5	-6.69	11.60	1.91	1.95
6	0	4.92		1.36	
6	1	1.16	-0.07	1.16	0.78
6	2	-4.61	-3.61	1.31	1.18
6	3	-2.33	-4.12	0.93	0.90
6	4	2.05	-0.77	1.34	1.33
6	5	3.30	-8.30	1.53	1.52
6	6	7.83	-9.56	2.28	2.44
7	0	5.75		1.25	
7	1	2.38	2.23	1.32	1.25
7	2	-1.76	-0.46	1.18	1.02
7	3	-0.62	1.05	1.21	1.19
7	4	0.89	0.37	0.95	0.97
7	5	2.19	0.93	1.24	1.24
7	6	-1.98	6.61	1.44	1.45
7	7	-11.13	9.18	2.06	2.12
8	0	3.62		1.06	
8	1	-1.02	2.55	1.12	0.77
8	2	2.24	-0.53	1.08	0.99
8	3	-0.79	1.67	1.06	1.02
8	4	4.51	-1.10	1.03	1.06
8	5	-3.32	4.31	0.93	0.92
8	6	-3.99	-3.71	1.11	1.10
8	7	-3.01	-0.30	1.23	1.23
8	8	1.88	-0.76	1.48	1.45
9	0	-2.62		0.96	
9	1	1.68	0.71	1.01	0.97
9	2	0.93	-1.51	0.88	0.83
9	3	-1.57	2.26	0.91	0.91
9	4	-0.88	2.00	0.86	0.86
9	5	-1.19	-3.54	0.84	0.83
9	6	-1.60	-0.63	0.82	0.83
9	7	-2.87	0.52	0.93	0.94
9	8	-2.82	-3.79	1.00	0.99
9	9	-0.99	0.92	1.02	1.03
10	0	0.77		0.82	
10	1	0.05	-1.77	0.81	0.76
10	2	0.54	-1.01	0.80	0.81
10	3	0.43	1.98	0.78	0.76
10	4	-3.55	0.42	0.75	0.75
10	5	0.12	0.15	0.72	0.72
10	6	-0.80	-2.39	0.69	0.70
10	7	-3.99	-4.58	0.72	0.72
10	8	-2.54	1.97	0.78	0.77
10	9	-2.79	1.74	0.80	0.80
10	10	-0.71	-0.55	0.82	0.82
11	0	-0.69		0.68	
11	1	0.31	-0.01	0.67	0.67
11	2	2.16	-0.07	0.68	0.67
11	3	0.99	0.75	0.65	0.64
11	4	-0.50	4.70	0.63	0.63
11	5	-0.85	1.59	0.61	0.61
11	6	0.97	-2.88	0.58	0.58
11	7	-0.18	-1.85	0.59	0.59
11	8	-3.10	0.40	0.62	0.62
11	9	-3.52	-0.48	0.64	0.65
11	10	-2.92	1.83	0.66	0.65
11	11	-0.72	-0.57	0.66	0.66

TABLE 2. (continued)

$n$	$m$	$C_{nm}$	$S_{nm}$	$\sigma(C_{nm})$	$\sigma(S_{nm})$
12	0	-1.00		0.57	
12	1	-0.92	2.36	0.57	0.56
12	2	-0.49	0.49	0.57	0.57
12	3	-0.02	-2.36	0.56	0.55
12	4	1.11	1.51	0.54	0.54
12	5	0.84	1.00	0.53	0.53
12	6	0.32	0.49	0.51	0.51
12	7	1.08	-0.75	0.50	0.50
12	8	-0.34	-2.94	0.52	0.51
12	9	-0.05	1.59	0.53	0.53
12	10	-2.34	-0.51	0.54	0.53
12	11	-2.04	-0.24	0.54	0.54
12	12	-0.15	-0.04	0.54	0.54
13	0	0.11		0.49	
13	1	0.25	-0.28	0.48	0.47
13	2	-1.94	0.63	0.47	0.47
13	3	-0.12	-1.15	0.47	0.47
13	4	1.41	-1.82	0.45	0.45
13	5	-1.24	0.17	0.45	0.45
13	6	-0.27	1.09	0.44	0.44
13	7	-1.25	-1.27	0.43	0.43
13	8	-0.34	-1.90	0.43	0.43
13	9	0.34	0.20	0.45	0.45
13	10	0.46	2.27	0.45	0.45
13	11	-1.55	0.21	0.45	0.46
13	12	-0.75	-1.46	0.46	0.45
13	13	0.66	-0.09	0.45	0.45
14	0	0.11		0.42	
14	1	0.53	-0.72	0.41	0.41
14	2	0.66	-0.22	0.40	0.40
14	3	0.39	1.19	0.40	0.41
14	4	-0.12	-0.97	0.40	0.40
14	5	-0.94	-0.08	0.40	0.40
14	6	-1.49	0.93	0.39	0.39
14	7	-0.57	0.76	0.38	0.38
14	8	0.64	0.14	0.38	0.38
14	9	0.52	0.52	0.38	0.38
14	10	-1.23	0.45	0.39	0.38
14	11	-2.10	1.17	0.38	0.39
14	12	-1.40	0.21	0.39	0.38
14	13	0.14	-0.75	0.38	0.38
14	14	0.81	-0.38	0.38	0.38
15	0	1.13		0.34	
15	1	-1.12	0.16	0.34	0.33
15	2	1.24	1.15	0.30	0.30
15	3	-1.11	0.42	0.27	0.27
15	4	-1.03	-2.63	0.31	0.31
15	5	-0.19	-0.29	0.29	0.29
15	6	-0.67	1.77	0.28	0.28
15	7	2.65	2.59	0.28	0.28
15	8	1.49	1.85	0.27	0.27
15	9	-0.67	-1.12	0.29	0.29
15	10	-0.15	0.46	0.33	0.33
15	11	-2.02	0.22	0.34	0.34
15	12	-2.19	0.08	0.34	0.33
15	13	-0.69	-0.20	0.33	0.33
15	14	0.15	0.17	0.33	0.33
15	15	0.28	0.03	0.33	0.33
16	0	0.63		0.31	
16	1	-0.56	-0.45	0.27	0.27
16	2	0.05	-0.01	0.30	0.30
16	3	-0.20	0.60	0.27	0.27
16	4	-0.52	0.21	0.28	0.28
16	5	0.61	-0.70	0.28	0.28
16	6	0.63	-1.46	0.28	0.28
16	7	-0.47	-0.35	0.28	0.28
16	8	-0.01	1.15	0.28	0.27
16	9	-0.45	-0.16	0.28	0.28
16	10	-0.06	0.25	0.29	0.28
16	11	0.16	0.98	0.28	0.28
16	12	-1.15	-0.31	0.27	0.27
16	13	-0.18	-0.17	0.27	0.27
16	14	0.05	-0.20	0.27	0.26
16	15	0.18	-0.02	0.26	0.26
16	16	-0.04	0.94	0.24	0.24

FIG. A.1 – Coefficients normalisés  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  du modèle en harmoniques sphériques de degré  $N = 16$  [Bills and Ferrari, 1980].

## A.2 Modèle en harmoniques sphériques de degré $N = 165$ .

```
.1738000000000000E+04, .4902801056000000E+04, .2170000000000000E-03, ...
... 165, 165, 1, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00
1, 0, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00
1, 1, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00, .0000000000000000E+00
2, 0, -.9080918075060000E-04, .0000000000000000E+00, .5462525382390000E-08, .0000000000000000E+00
2, 1, -.2722032361590000E-08, -.7575182920830000E-09, .4505315582830000E-08, .3485921417110000E-08
2, 2, .3463549937220000E-04, .1672949053830000E-07, .3684587359180000E-08, .3042220665000000E-08
3, 0, -.3203591400300000E-05, .0000000000000000E+00, .6482991943890000E-08, .0000000000000000E+00
3, 1, .2632744012180000E-04, .5464363089820000E-05, .7496882504270000E-08, .4465401948060000E-08
3, 2, .1418817932940000E-04, .4892036500480000E-05, .6742524852930000E-08, .6037402771920000E-08
3, 3, .122860589470000E-04, -.1785448081640000E-05, .4519014367070000E-08, .4568425931770000E-08
4, 0, .3197309571720000E-05, .0000000000000000E+00, .7220891854120000E-08, .0000000000000000E+00
4, 1, -.5996601830150000E-05, -.1661934519470000E-05, .9010258662670000E-08, .5467791388070000E-08
4, 2, -.7081806926970000E-05, -.6783627172690000E-05, .9994580625720000E-08, .8972068683360001E-08
4, 3, -.1362298338130000E-05, -.1344347228710000E-04, .8760818997220000E-08, .8731256401490000E-08
4, 4, -.6025778735830000E-05, .3939637195380000E-05, .6286597825420000E-08, .5365321551570000E-08
5, 0, -.2157038206820000E-06, .0000000000000000E+00, .7519510081300001E-08, .0000000000000000E+00
5, 1, -.1019195653760000E-05, -.4109254150730000E-05, .7841014866320000E-08, .5392519109080000E-08
5, 2, .4376608114970000E-05, .1084099769880000E-05, .1057621816520000E-07, .1054060159130000E-07
5, 3, .4497767875950000E-06, .8700841208620000E-05, .1456341596870000E-07, .1370739973200000E-07
5, 4, .2783424136030000E-05, .5938802393300000E-07, .1389950395460000E-07, .1358827105030000E-07
5, 5, .3119625893770000E-05, -.2760966271960000E-05, .8308127339100000E-08, .7501901799609999E-08
6, 0, .3765780618660000E-05, .0000000000000000E+00, .1002977831050000E-07, .0000000000000000E+00
6, 1, .1531984393890000E-05, -.2576600639760000E-05, .1289648652920000E-07, .7129356969530000E-08
6, 2, -.4352218123230000E-05, -.2187448015220000E-05, .1093154407480000E-07, .1045995672970000E-07
6, 3, -.3270051634600000E-05, -.3469143028430000E-05, .1691633876460000E-07, .1747346055090000E-07
6, 4, .3697821857860000E-06, -.4068810656300000E-05, .2261785681200000E-07, .2145760224800000E-07
6, 5, .1404474618350000E-05, -.1033170188970000E-04, .2056713913620000E-07, .2081347702150000E-07
6, 6, -.4704301085460000E-05, .7236008813510000E-05, .1077919687420000E-07, .1027723644430000E-07
7, 0, .5622211787280000E-05, .0000000000000000E+00, .1598425823200000E-07, .0000000000000000E+00
7, 1, .7552259234450000E-05, -.1296522202330000E-06, .2128947621200000E-07, .9549391329820001E-08
7, 2, -.6631948361600000E-06, .2384789067160000E-05, .1536417851160000E-07, .1245179278580000E-07
7, 3, .5826787994770001E-06, .2355772260700000E-05, .1795963229900000E-07, .1763108077350000E-07
7, 4, -.9266265301300000E-06, .7915736546610000E-06, .2763906239740000E-07, .2802395775570000E-07
7, 5, -.2719477973700000E-06, .1126877878840000E-05, .3424976172810000E-07, .3319940742860000E-07
7, 6, -.9928857241339999E-06, .1107954868940000E-05, .3073236480130000E-07, .3067895947490000E-07
7, 7, -.178466088650000E-05, -.1616507107160000E-05, .1478488428320000E-07, .135455927810000E-07
8, 0, .234649880120000E-05, .0000000000000000E+00, .1952880910250000E-07, .0000000000000000E+00
8, 1, -.6088981217920000E-07, .1112544861480000E-05, .2481987126530000E-07, .1183316802380000E-07
8, 2, .2994777877990000E-05, .1925832475840000E-05, .2229835563730000E-07, .1930953168360000E-07
8, 3, -.1880012181150000E-05, .9535825605100000E-06, .1913424578280000E-07, .195388427490000E-07
8, 4, .33735197217320000E-05, -.4560565395690000E-06, .2823526730680000E-07, .2734941410150000E-07
8, 5, -.1125272717320000E-05, .2925714953190000E-05, .4493597454930000E-07, .4481567191790000E-07
8, 6, -.1543301441280000E-05, -.2248184271110000E-05, .5185985245620000E-07, .4841005950270000E-07
8, 7, -.1591465180010000E-05, .3222090972550000E-05, .4456158646330000E-07, .4359258667380000E-07
8, 8, -.2530697259120000E-05, .2140620023560000E-05, .1986002858400000E-07, .1738108831600000E-07
...
...
165, 164, -.2736148234080000E-07, .7058635103340000E-07, .1662904542080000E-08, .1658714113890000E-08
165, 165, .4412780122870000E-07, -.1464362475940000E-07, .4921469373390000E-09, .4895342303780000E-09
```

**FIG. A.2** – Les premiers coefficients normalisés  $\bar{C}_{nm}$  et  $\bar{S}_{nm}$  du modèle en harmoniques sphériques de degré  $N = 165$  [Konopliv et al., 2001]. La première ligne est le header ; ensuite le format est :  $n, m, \bar{C}_{mn}, \bar{S}_{mn}, \sigma(\bar{C}_{mn}), \sigma(\bar{S}_{mn})$ .



## Annexe B

### Calcul des dérivées $\partial\Xi/\partial\Lambda$

Nous avons défini en (5.9) le jeu de variables auxiliaires  $\Xi \equiv (\xi, f, u, g, h, a, n, e, \eta, s, c)$ . Afin de calculer les parenthèses de Poisson, nous avons besoin des dérivées partielles de ce jeu de variables  $\Xi$  par rapport aux variables canoniques  $\Lambda \equiv (l, g, h, L, G, H)$ . C'est l'objet de ce chapitre.

Nous avons repris à la Table B.1 l'ensemble des dérivées partielles. On peut d'emblée remarquer que beaucoup sont triviales (0 ou 1), et que seules les cases marquées du symbole  $\star$  sont à calculer (beaucoup moins triviales).

	$\xi$	$f$	$u$	$g$	$h$	$a$	$n$	$s$	$c$	$e$	$\eta$
$\partial/\partial L$	$\star$	$\star$	$\star$	0	0	$\star$	$\star$	0	0	$\star$	$\star$
$\partial/\partial G$	$\star$	$\star$	$\star$	0	0	0	0	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$
$\partial/\partial H$	0	0	0	0	0	0	0	$\star$	$\star$	0	0
$\partial/\partial l$	$\star$	$\star$	$\star$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\partial/\partial g$	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$\partial/\partial h$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

TAB. B.1 – Dépendances du jeu de variables  $\Xi$ .

Dans les calculs, on tâchera d'exprimer le résultat en fonction des variables elles-mêmes, afin de conserver un jeu de variables fermé. On fera ainsi un grand usage des relations suivantes :

$$an = \frac{\mu}{L} \qquad na^2 = L \qquad na^2\eta = G \qquad (\text{B.1})$$

Dans la mesure du possible, on évitera également d'introduire inutilement l'anomalie excentrique  $u$ , ce qui peut souvent se faire grâce aux relations (1.6)–(1.18) du problème des 2 corps (voir Chapitre 1.2).

#### B.1 Dérivées partielles de $a, n, s, c, e, \eta$ .

Le calcul des dérivées de quantités indépendantes des anomalies ne pose pas de problème particulier.



Pour  $a$  et  $n$ , on a :

$$\frac{\partial a}{\partial L} = \frac{2L}{\mu} = \frac{2}{an} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial n}{\partial L} = \mu^2(-3)L^{-4} = (-3)\left(\frac{\mu}{L^2}\right)^2 = -\frac{3}{a^2} \quad (\text{B.3})$$

tandis que pour  $s$  et  $c$ , on a :

$$\frac{\partial s}{\partial G} = \frac{1}{2s}(-H^2)(-2G^{-3}) = \frac{1}{s}\left(\frac{H}{G}\right)^2 \frac{1}{G} = \frac{c^2}{na^2\eta s} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial s}{\partial H} = \frac{1}{2s}\left(\frac{-1}{G^2}\right)(2H) = -\frac{1}{s}\frac{H}{G}\frac{1}{G} = -\frac{c}{na^2\eta s} \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial c}{\partial G} = -\frac{H}{G^2} = -\frac{H}{G}\frac{1}{G} = -\frac{c}{na^2\eta} \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial c}{\partial H} = \frac{1}{G} = \frac{1}{na^2\eta} \quad (\text{B.7})$$

et finalement pour  $e$  et  $\eta$  :

$$\frac{\partial e}{\partial L} = \frac{1}{2e}(-G^2)(-2L^{-3}) = \frac{1}{e}\left(\frac{G}{L}\right)^2 \frac{1}{L} = \frac{\eta^2}{na^2e} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial e}{\partial G} = \frac{1}{2e}\left(\frac{-1}{L^2}\right)(2G) = -\frac{1}{e}\frac{G}{L}\frac{1}{L} = -\frac{\eta}{na^2e} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial L} = -\frac{G}{L^2} = -\frac{G}{L}\frac{1}{L} = -\frac{\eta}{na^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial G} = \frac{1}{L} = \frac{1}{na^2} \quad (\text{B.11})$$

## B.2 Dérivées partielles de $\xi, f, u$ .

Pour le calcul des dérivées de toutes les quantités  $(\xi, f, u)$  liées à l'anomalie moyenne  $l$ , nous dérivons l'équation de Kepler (B.12) par rapport aux variables canoniques  $(l, L, G)$ , ce qui est fait en (B.13)–(B.15).

$$l = u - e \sin u \quad (\text{B.12})$$

$$1 = \frac{dl}{dl} = \frac{\partial u}{\partial l} - \frac{\partial e}{\partial l} \sin u - e \cos u \frac{\partial u}{\partial l} = \xi^{-1} \frac{\partial u}{\partial l} \quad (\text{B.13})$$

$$0 = \frac{dl}{dL} = \frac{\partial u}{\partial L} - \frac{\partial e}{\partial L} \sin u - e \cos u \frac{\partial u}{\partial L} = \xi^{-1} \frac{\partial u}{\partial L} - \frac{\partial e}{\partial L} \sin u \quad (\text{B.14})$$

$$0 = \frac{dl}{dG} = \frac{\partial u}{\partial G} - \frac{\partial e}{\partial G} \sin u - e \cos u \frac{\partial u}{\partial G} = \xi^{-1} \frac{\partial u}{\partial G} - \frac{\partial e}{\partial G} \sin u \quad (\text{B.15})$$

d'où on tire les relations :

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \xi \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{\partial u}{\partial L} = \frac{\partial e}{\partial L} \xi \sin u \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\partial u}{\partial G} = \frac{\partial e}{\partial G} \xi \sin u \quad (\text{B.18})$$

### B.2.1 Dérivées partielles de l'anomalie excentrique $u$ .

Pour calculer les dérivées de  $u$ , on repart de (B.16)–(B.18), ce qui donne :

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \xi \quad (\text{B.19})$$

$$\frac{\partial u}{\partial L} = \frac{\partial e}{\partial L} \xi \sin u \stackrel{(1.17)}{=} \frac{\partial e}{\partial L} \frac{\sin f}{\eta} \stackrel{(B.8)}{=} \frac{\eta}{na^2e} \sin f \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial u}{\partial G} = \frac{\partial e}{\partial G} \xi \sin u \stackrel{(1.17)}{=} \frac{\partial e}{\partial G} \frac{\sin f}{\eta} \stackrel{(B.9)}{=} -\frac{1}{na^2e} \sin f \quad (\text{B.21})$$

Maintenant qu'on dispose des dérivées d'une anomalie ( $u$ ), celles de  $\xi$  et  $f$  pourront en être plus facilement déduites.

### B.2.2 Dérivées partielles de $\xi = \frac{a}{r}$ .

Il faut repartir de la relation (5.9) qui lie  $\xi$  et  $u$  :

$$\xi = \frac{1}{1 - e \cos u} \quad (\text{5.9})$$

et la dériver par rapport à  $(l, L, G)$ . Pour  $\partial\xi/\partial l$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial l} &= \frac{\partial \xi}{\partial(1 - e \cos u)} \frac{\partial(1 - e \cos u)}{\partial l} = -\xi^2 \left( -\frac{\partial e}{\partial l} \cos u + e \sin u \frac{\partial u}{\partial l} \right) \\ &\stackrel{(1.17)}{=} -\xi^2 \frac{\partial u}{\partial l} e \xi^{-1} \frac{\sin f}{\eta} \\ &\stackrel{(B.16)}{=} -\frac{\xi^2 e}{\eta} \sin f \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

tandis que pour  $\partial\xi/\partial L$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial L} &= \frac{\partial \xi}{\partial(1 - e \cos u)} \frac{\partial(1 - e \cos u)}{\partial L} = -\frac{1}{(1 - e \cos u)^2} \left( -\frac{\partial e}{\partial L} \cos u + e \sin u \frac{\partial u}{\partial L} \right) \\ &\stackrel{(B.17)}{=} -\xi^2 \frac{\partial e}{\partial L} (-\cos u + e \xi \sin^2 u) = -\xi^2 \frac{\partial e}{\partial L} \frac{-\cos u(1 - e \cos u) + e \sin^2 u}{1 - e \cos u} \\ &\stackrel{(5.9)}{=} -\xi^2 \frac{\partial e}{\partial L} \xi (e - \cos u) \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

$$\stackrel{(1.18)}{=} \xi^2 \frac{\partial e}{\partial L} \cos f \quad (\text{B.23})$$

$$\stackrel{(B.8)}{=} \frac{\xi^2 \eta^2}{na^2e} \cos f \quad (\text{B.24})$$

et finalement on calcule  $\partial\xi/\partial G$  de façon très similaire à  $\partial\xi/\partial L$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi}{\partial G} &= \frac{\partial\xi}{\partial(1-e\cos u)} \frac{\partial(1-e\cos u)}{\partial G} \\ &\stackrel{(B.18)}{=} -\xi^2 \frac{\partial e}{\partial G} (-\cos u + e\xi \sin^2 u) \\ &\stackrel{(5.9)}{=} -\xi^2 \frac{\partial e}{\partial G} \xi(e - \cos u) \\ &\stackrel{(1.18)}{=} \xi^2 \frac{\partial e}{\partial G} \cos f\end{aligned}\tag{B.25}$$

$$\stackrel{(B.9)}{=} -\frac{\xi^2 \eta}{na^2 e} \cos f\tag{B.26}$$

### B.2.3 Dérivées partielles de $f$ .

On peut à présent se servir des dérivées de  $u$  et  $\xi$  pour calculer celles de  $f$ .

Pour la dérivée  $\partial f/\partial l$ , il faut partir d'une relation qui lie  $f$  à  $\xi$  et/ou  $u$ , de la façon la plus simple possible (ne comprenant qu'une autre anomalie), comme par exemple :

$$1 + e \cos f = \xi \eta^2\tag{5.9}$$

ce qui donne alors directement :

$$-e \sin f \frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial \xi}{\partial l} \eta^2 \stackrel{(B.22)}{=} -\xi^2 \eta e \sin f\tag{B.27}$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \xi^2 \eta\tag{B.28}$$

Pour les dérivées par rapport à  $L$  et  $G$ , il vaut mieux repartir d'une formule qui isole bien  $f$ , par exemple une des relations classiques du problème des 2 corps :

$$\cos f = \xi(\cos u - e)\tag{1.18}$$

ce qui donne pour  $\partial f/\partial L$  :

$$\begin{aligned}-\sin f \frac{\partial f}{\partial L} &= \frac{\partial \xi}{\partial L} (\cos u - e) + \xi \left\{ -\sin u \frac{\partial u}{\partial L} - \frac{\partial e}{\partial L} \right\} \\ &\stackrel{(B.17)}{=} \frac{\partial \xi}{\partial L} (\cos u - e) - \xi \frac{\partial e}{\partial L} \{ \xi \sin^2 u + 1 \} \\ &\stackrel{(1.18)}{=} \frac{\partial \xi}{\partial L} \xi^{-1} \cos f - \xi^2 \frac{\partial e}{\partial L} \left\{ \sin^2 u + \frac{1}{\xi} \right\} \\ &\stackrel{(1.17)}{=} \frac{\partial \xi}{\partial L} \xi^{-1} \cos f - \xi^2 \frac{\partial e}{\partial L} \left\{ \frac{\sin^2 f + \xi \eta^2}{\xi^2 \eta^2} \right\} \\ &\stackrel{(B.23)}{=} \frac{\partial e}{\partial L} \frac{1}{\eta^2} [\xi \eta^2 \cos^2 f - (\sin^2 f + \xi \eta^2)] \\ &\stackrel{(B.8)}{=} \frac{1}{na^2 e} [1 + \xi \eta^2] (-\sin^2 f)\end{aligned}\tag{B.29}$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial f}{\partial L} = \frac{1 + \xi\eta^2}{na^2e} \sin f \quad (\text{B.30})$$

Le calcul de  $\partial f/\partial G$  est à nouveau très similaire à celui de  $\partial f/\partial L$  :

$$\begin{aligned} -\sin f \frac{\partial f}{\partial G} &= \frac{\partial \xi}{\partial G} (\cos u - e) + \xi \left\{ -\sin u \frac{\partial u}{\partial G} - \frac{\partial e}{\partial G} \right\} \\ &\stackrel{(\text{B.18})}{=} \frac{\partial \xi}{\partial G} (\cos u - e) - \xi \frac{\partial e}{\partial G} \{ \xi \sin^2 u + 1 \} \\ &\stackrel{(\text{1.18})}{=} \frac{\partial \xi}{\partial G} \xi^{-1} \cos f - \xi^2 \frac{\partial e}{\partial G} \left\{ \sin^2 u + \frac{1}{\xi} \right\} \\ &\stackrel{(\text{1.17})}{=} \frac{\partial \xi}{\partial G} \xi^{-1} \cos f - \xi^2 \frac{\partial e}{\partial G} \left\{ \frac{\sin^2 f + \xi\eta^2}{\xi^2\eta^2} \right\} \\ &\stackrel{(\text{B.25})}{=} \frac{\partial e}{\partial G} \frac{1}{\eta^2} [\xi\eta^2 \cos^2 f - (\sin^2 f + \xi\eta^2)] \\ &\stackrel{(\text{B.9})}{=} -\frac{1}{na^2e\eta} [1 + \xi\eta^2] (-\sin^2 f) \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial f}{\partial G} = -\frac{1 + \xi\eta^2}{na^2e\eta} \sin f \quad (\text{B.32})$$

### B.3 Tableau résumé des dérivées partielles $\partial\Xi/\partial\Lambda$ .

La Table B.2 résume les dépendances principales des variables de  $\Xi$  (outre les variables  $g$  et  $h$ , qui sont indépendantes) par rapport à  $\Lambda$ .

Remarquons que pour toutes les quantités liées à l'excentricité (c'est-à-dire  $q \in \{\xi, f, u, e, \eta\}$ ), on a la symétrie  $\frac{\partial q}{\partial G} = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial q}{\partial L}$ .

	$\xi$	$f$	$u$	$a$	$n$	$s$	$c$	$e$	$\eta$
$\partial/\partial L$	$\frac{\xi^2\eta^2}{na^2e} \cos f$	$\frac{1+\xi\eta^2}{na^2e} \sin f$	$\frac{\eta}{na^2e} \sin f$	$\frac{2}{an}$	$-\frac{3}{a^2}$	0	0	$\frac{\eta^2}{na^2e}$	$-\frac{\eta}{na^2}$
$\partial/\partial G$	$-\frac{\xi^2\eta}{na^2e} \cos f$	$-\frac{1+\xi\eta^2}{na^2e\eta} \sin f$	$-\frac{1}{na^2e} \sin f$	0	0	$\frac{c^2}{na^2\eta s}$	$-\frac{c}{na^2\eta}$	$-\frac{\eta}{na^2e}$	$\frac{1}{na^2}$
$\partial/\partial H$	0	0	0	0	0	$-\frac{c}{na^2\eta s}$	$\frac{1}{na^2\eta}$	0	0
$\partial/\partial l$	$-\frac{\xi^2e}{\eta} \sin f$	$\xi^2\eta$	$\xi$	0	0	0	0	0	0

TAB. B.2 – Dérivées partielles  $\partial\Xi/\partial\Lambda$ .

## B.4 Dérivées partielles annexes : $\ln(r)$ .

Nous utilisons aussi  $\ln(r)$ , qui apparaît quand on intègre du  $\xi^1$ . Nous donnons dès lors également ses dérivées, mais sans le détail cette fois.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(r)}{\partial L} &= \frac{2}{a^2 n} - \frac{\xi \eta^2}{na^2 e} \cos f & \frac{\partial \ln(r)}{\partial G} &= \frac{\xi \eta}{na^2 e} \cos f & \frac{\partial \ln(r)}{\partial H} &= 0 \\ \frac{\partial \ln(r)}{\partial l} &= \frac{\xi e}{\eta} \sin f & \frac{\partial \ln(r)}{\partial g} &= 0 & \frac{\partial \ln(r)}{\partial h} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

## Annexe C

### Générateurs en $J_2^2$

#### C.1 Série du générateur du second ordre $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{F}_\mathcal{W}$ .

TAB. C.1: Série du générateur du second ordre  $\mathcal{W}_2 \times \mathcal{F}_\mathcal{W}$ .

$f$	$g$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	2	2	0	1	$0.1536000000000000D + 04$
cos	0	0	0	0	0	2	4	0	1	$-0.7680000000000000D + 04$
cos	0	0	0	0	2	2	0	0	1	$0.9600000000000000D + 03$
cos	0	0	0	0	2	2	2	0	1	$-0.3456000000000000D + 04$
cos	0	0	0	0	2	2	4	0	1	$0.9600000000000000D + 03$
cos	0	2	0	0	2	2	0	2	1	$-0.3840000000000000D + 03$
cos	0	2	0	0	2	2	2	2	1	$0.5760000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	1	0	0	0	0	$0.2880000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	1	0	2	0	0	$-0.1113600000000000D + 05$
sin	1	0	0	0	1	0	4	0	0	$0.2880000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	1	1	0	0	0	$-0.9600000000000000D + 03$
sin	1	0	0	0	1	1	2	0	0	$0.5760000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	1	1	4	0	0	$-0.8640000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	3	0	0	0	0	$-0.2112000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	3	0	2	0	0	$0.6528000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	3	0	4	0	0	$0.4032000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	3	1	0	0	0	$0.1920000000000000D + 03$
sin	1	0	0	0	3	1	2	0	0	$-0.1152000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	3	1	4	0	0	$0.1728000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	$-0.7680000000000000D + 03$
sin	1	0	0	0	-1	0	2	0	0	$0.4608000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	-1	0	4	0	0	$-0.6912000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	-1	1	0	0	0	$0.7680000000000000D + 03$
sin	1	0	0	0	-1	1	2	0	0	$-0.4608000000000000D + 04$
sin	1	0	0	0	-1	1	4	0	0	$0.6912000000000000D + 04$
cos	1	2	0	0	1	2	0	2	1	$0.2304000000000000D + 04$
cos	1	2	0	0	1	2	2	2	1	$-0.1152000000000000D + 05$

*suite à la page suivante*



*suite de la page précédente*

$f$	$g$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\phi$	Coefficient	
sin	3	2	0	0	0	1	1	2	2	0	$-0.2784000000000000D+04$
sin	3	2	0	0	0	3	0	0	2	0	$-0.1120000000000000D+04$
sin	3	2	0	0	0	3	0	2	2	0	$0.3104000000000000D+04$
sin	3	2	0	0	0	3	1	0	2	0	$-0.3200000000000000D+02$
sin	3	2	0	0	0	3	1	2	2	0	$0.9600000000000000D+02$
sin	3	2	0	0	0	-1	0	0	2	0	$0.8960000000000000D+03$
sin	3	2	0	0	0	-1	0	2	2	0	$-0.2688000000000000D+04$
sin	3	2	0	0	0	-1	1	0	2	0	$-0.8960000000000000D+03$
sin	3	2	0	0	0	-1	1	2	2	0	$0.2688000000000000D+04$
sin	3	4	0	0	0	1	2	0	4	0	$-0.1920000000000000D+03$
sin	4	2	0	0	0	0	2	0	2	0	$0.5760000000000000D+03$
sin	4	2	0	0	0	0	2	2	2	0	$-0.1728000000000000D+04$
sin	4	2	0	0	0	0	3	0	2	0	$-0.5760000000000000D+03$
sin	4	2	0	0	0	0	3	2	2	0	$0.1728000000000000D+04$
sin	4	2	0	0	0	2	2	0	2	0	$0.2880000000000000D+03$
sin	4	2	0	0	0	2	2	2	2	0	$-0.1248000000000000D+04$
sin	4	4	0	0	0	0	2	0	4	0	$0.1920000000000000D+03$
sin	4	4	0	0	0	2	2	0	4	0	$-0.4800000000000000D+02$
sin	5	2	0	0	0	1	2	0	2	0	$0.9600000000000000D+02$
sin	5	2	0	0	0	1	2	2	2	0	$-0.2880000000000000D+03$
sin	5	2	0	0	0	1	3	0	2	0	$-0.9600000000000000D+02$
sin	5	2	0	0	0	1	3	2	2	0	$0.2880000000000000D+03$
sin	5	4	0	0	0	1	2	0	4	0	$0.1920000000000000D+03$
sin	6	4	0	0	0	2	2	0	4	0	$0.4800000000000000D+02$



## C.2 Générateur du second ordre $S_2$ de Kozai.

$$\begin{aligned}
S_2 = & (\mu^4 J_z^2 / 4096 G^2) L^2 (96[-5\eta^2(1-2\theta^2-7\theta^4) + \eta^4(5-18\theta^2+5\theta^4)](f-l) + (48/e)[9(11-30\theta^2+27\theta^4) \\
& - 8\eta^2(17-38\theta^2+11\theta^4) - 4\eta^4(1-3\theta^2)^2(3+\eta^2) + \eta^4(53-130\theta^2-11\theta^4)] \sin f + 6[87(11-30\theta^2+27\theta^4) \\
& - 2\eta^2(389-834\theta^2+437\theta^4) - 64\eta^4(1-3\theta^2)^2 + \eta^4(93-242\theta^2+77\theta^4)] \sin 2f + 8e[41(11-30\theta^2+27\theta^4) \\
& - \eta^2(191-390\theta^2+207\theta^4) - 8\eta^4(1-3\theta^2)^2] \sin 3f + 24e^2[5(11-30\theta^2+27\theta^4) - 8\eta^2(1-\theta^2)^2] \sin 4f \\
& + 24e^3(11-30\theta^2+27\theta^4) \sin 5f + 2e^4(11-30\theta^2+27\theta^4) \sin 6f + (1-\theta^2)\{192e^2\eta^2(1-15\theta^2)(f-l) \cos 2g \\
& - 12e^4(1-3\theta^2) \sin(4f-2g) - 144e^2(1-3\theta^2) \sin(3f-2g) + 48e^2(1-3\theta^2)(-15+2\eta^2) \sin 2(f-g) \\
& + 48e(1-3\theta^2)(-41+15\eta^2+2\eta^4) \sin(f-2g) + (96/e)[(1-3\theta^2)(27-9\eta^2+5\eta^4) - \eta^2(25-3\theta^2) + 2\eta^4(1+33\theta^2)] \\
& \times \sin(f+2g) + 384[-\eta^2(1+7\theta^2) + 4\eta^4\theta^2] \sin 2(f+g) + (32/e)[(1-3\theta^2)(-81+27\eta^2+\eta^4) \\
& + 5\eta^2(11-41\theta^2) - 2\eta^4(1-23\theta^2)] \sin(3f+2g) + 12[3(1-3\theta^2)(-87+16\eta^2) + 2\eta^2(51-161\theta^2) - \eta^4(1-19\theta^2)] \\
& \times \sin(4f+2g) + 48e(1-3\theta^2)(-41+7\eta^2+2\eta^4) \sin(5f+2g) + 16e^2(1-3\theta^2)(-45+2\eta^2) \sin(6f+2g) \\
& - 144e^3(1-3\theta^2) \sin(7f+2g) - 12e^4(1-3\theta^2) \sin(8f+2g) + 9e^4(1-\theta^2) \sin(2f-4g) + 108e^2(1-\theta^2) \sin(f-4g) \\
& + 36e(1-\theta^2)(-41+29\eta^2) \sin(f+4g) + 3[-783(1-\theta^2) + 2\eta^2(335-239\theta^2) + \eta^4(65-257\theta^2)] \sin(2f+4g) \\
& + (24/e)[-81(1-\theta^2) + 16\eta^2(4-\theta^2) + \eta^4(17-65\theta^2)] \sin(3f+4g) + 24[-\eta^2(51-91\theta^2) + \eta^4(11-27\theta^2)] \sin 4(f+g) \\
& + (24/e)[81(1-\theta^2) - 8\eta^2(15-17\theta^2) + \eta^4(39-55\theta^2)] \sin(5f+4g) + [2349(1-\theta^2) - 2\eta^2(861-893\theta^2) \\
& + \eta^4(157-221\theta^2)] \sin(6f+4g) + 36e(1-\theta^2)(41-13\eta^2) \sin(7f+4g) + 12e^2(1-\theta^2)(45-4\eta^2) \sin(8f+4g) \\
& + 108e^2(1-\theta^2) \sin(9f+4g) + 9e^4(1-\theta^2) \sin(10f+4g) + 4[783(1-3\theta^2) - \eta^2(535-1317\theta^2) - 8\eta^4(13-75\theta^2) \\
& - 24\eta^4(1-15\theta^2)(1-\eta)] \sin 2g - 36e^2(1-\theta^2)(15-4\eta^2) \sin 4g\}. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

FIG. C.1 – Générateur du second ordre  $S_2$  de Kozai.

## Annexe D

### Quelques propositions concernant les intégrales

Nous définissons avant tout la fonction *parité*  $\pi_i$  de  $i \in \mathbb{N}$  qui nous sera très utile par la suite :

$$\pi_i = i - 2\lfloor \frac{i}{2} \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \text{ pair,} \\ 1 & \text{pour } i \text{ impair,} \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

où  $\lfloor i \rfloor$  représente la partie entière inférieure de  $i$ , et la fonction *parité complémentaire*  $\lambda_i$  :

$$\lambda_i = 1 - \pi_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } i \text{ pair,} \\ 0 & \text{pour } i \text{ impair.} \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

#### D.1 Calcul de $\int \cos^i(x) dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos^i(x) dx$

PROPOSITION 1.

*Si on définit  $\lambda_i$  via (D.2), alors nous avons, pour  $i$  quelconque (pair ou impair) :*

$$\int \cos^i(x) dx = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} 2 \binom{i}{j} \frac{\sin(i-2j)x}{(i-2j)} + \lambda_i \binom{i}{\frac{i}{2}} x \right\}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(x) dx = \lambda_i \frac{1}{2^i} \binom{i}{\frac{i}{2}} 2\pi$$

*Preuve.* La fonction  $\cos^i x$  peut être développée (voir **1.320** 1. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980]) de la façon suivante :

$$\cos^{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} \cos 2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right\} \quad (\text{D.3})$$

$$\cos^{2n-1}(x) = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} \cos(2n-2k-1)x \quad (\text{D.4})$$

qui peut être réécrit comme :

$$\cos^i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{i}{2}-1} 2 \binom{i}{j} \cos(i-2j)x + \binom{i}{\frac{i}{2}} \right\} & \text{pour } i \text{ pair,} \\ \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \binom{i}{j} \cos(i-2j)x & \text{pour } i \text{ impair.} \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

et résumé en une formule valable pour  $i$  quelconque (pair ou impair) :

$$\cos^i(x) = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} 2 \binom{i}{j} \cos(i-2j)x + \lambda_i \binom{i}{\frac{i}{2}} \right\} \quad (\text{D.6})$$

à l'aide de la définition (D.2) de  $\lambda_i$ . L'intégration de (D.6) donne — voir aussi **2.513** 3. et 4. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980] :

$$\int \cos^i(x) dx = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} 2 \binom{i}{j} \frac{\sin(i-2j)x}{(i-2j)} + \lambda_i \binom{i}{\frac{i}{2}} x \right\} . \quad (\text{D.7})$$

Notons en passant que  $(i-2j)$  n'atteint jamais zéro pour  $j$  quelconque dans l'intervalle. On a donc en particulier pour la valeur moyenne :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(x) dx = \lambda_i \frac{1}{2^i} \binom{i}{\frac{i}{2}} 2\pi \quad (\text{D.8})$$

tandis que pour l'intégration de la *partie périodique* seulement (ce que nous allons désigner par le symbole  $\int_{pp}$ ) de  $\cos^i(x)$ , on a :

$$\int_{pp} \cos^i(x) dx = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} 2 \binom{i}{j} \frac{\sin(i-2j)x}{i-2j} \right\} \text{ pour } i \text{ quelconque (pair ou impair).} \quad (\text{D.9})$$

□

Ces formules ont été vérifiées à l'aide d'un logiciel de manipulation symbolique (Mathematica). Par exemple, l'intégration faite par Mathematica donne, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}(x) dx = 0 \quad (\text{D.10})$$

ce qui valide directement le cas impair. Pour le cas  $i$  pair, nous avons le résultat :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(x) dx = \frac{1}{2^i} \binom{i}{\frac{i}{2}} 2\pi \quad (\text{D.11})$$

qui peut être réécrit

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) dx = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi \quad (\text{D.12})$$

Et Mathematica donne :

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) dx = \frac{2^{1+2n} \pi^2}{(2n)! \left( \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) \right)^2} \quad (\text{D.13})$$

un résultat qui fait appel à la fonction Gamma  $\Gamma$  (l'intégrale d'Euler de seconde espèce), réduite au cas  $n \in \mathbb{N}$ . Nous devons donc également exprimer le membre de droite de (D.12) à l'aide de la fonction Gamma :

$$\frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} 2\pi = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(1+n)} \quad (\text{D.14})$$

Il ne reste finalement plus qu'à vérifier qu'on a bien :

$$\frac{2^{1+2n}\pi^2}{(2n)! \left(\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)\right)^2} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(1+n)} \quad (\text{D.15})$$

expression qui est vraie si l'on considère les relations suivantes, valables pour  $n \in \mathbb{N}$  (voir 8.339 de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980]) :

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \\ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n-1)!! \\ \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) &= (-1)^n \frac{2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!} \\ (2n)! &= (2)^n n! (2n-1)!! \end{aligned} \quad (\text{D.16})$$

où  $(2n-1)!!$  signifie le produit de tous les entiers impairs plus petits ou égaux à  $(2n-1)$ .

## D.2 Calcul de $\int_{pp} \cos^i(f) \cos(af) df$ et $\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df$

PROPOSITION 2.

Pour  $i, a \in \mathbb{N}$ , et  $a > 0$ , on a

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{i-1}} \binom{i}{\frac{i-a}{2}} & \text{si } i \text{ et } a \text{ ont la même parité, et si } a \leq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{pp} \cos^i(f) \cos(af) df &= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j+a)f}{i-2j+a} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j-a)f}{i-2j-a} \right\} + \lambda_i \left( \frac{i}{2} \right) \frac{\sin(af)}{a} \right\} \end{aligned}$$

pour  $i$  quelconque (pair ou impair), avec  $j^* = \frac{i-a}{2}$  et avec la définition (D.2) de  $\lambda_i$ .

*Preuve (pour le cas  $i$  impair).* La fonction  $\cos^i f$  peut être développée via (D.5), ce qui donne :

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \binom{i}{j} \cos(i-2j)f \cos(af) df \\ &= \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \binom{i}{j} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left\{ \cos(i-2j+a)f + \cos(i-2j-a)f \right\} df \quad (\text{D.17}) \end{aligned}$$

en utilisant la formule  $2 \cos u \cos v = \cos(u+v) + \cos(u-v)$ . Mais toutes les fonctions trigonométriques ont une contribution nulle, excepté les cas (\*)  $(i-2j+a) = 0 \leftrightarrow j = \frac{i+a}{2}$  et (\*\*)  $(i-2j-a) = 0 \leftrightarrow j = \frac{i-a}{2}$ . Comme  $j \in \mathbb{N}$ ,  $i$  et  $a$  doivent être

de même parité. Puisque la limite supérieure de  $j$  est  $\frac{i-1}{2}$ ,  $j$  n'atteindra jamais  $\frac{i+a}{2}$  puisque  $a \in \mathbb{N}$ . Le seul cas qui reste à considérer est donc  $(**)$   $j = \frac{i-a}{2} = j^*$ ; avec la contrainte finale que  $i \geq a$ .

D'où (D.17) devient :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{i-1}} \left( \frac{i}{2} \right) & \text{si } i \text{ et } a \text{ ont la même parité, et si } a \leq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{D.18})$$

De plus, si l'on considère à présent l'intégration de la partie uniquement périodique, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{pp} \cos^i(f) \cos(af) df \\ &= \frac{1}{2^{i-1}} \sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \binom{i}{j} \int_{pp} \frac{1}{2} \left\{ \cos(i-2j+a)f + \cos(i-2j-a)f \right\} df \\ &= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{i-1}{2}} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j+a)f}{i-2j+a} \right\} + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\frac{i-1}{2}} \frac{\sin(i-2j-a)f}{i-2j-a} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

□

*Preuve (pour le cas  $i$  pair).* La fonction  $\cos^i f$  peut être développée via (D.5), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{i}{2}-1} 2 \binom{i}{j} \cos(i-2j)f + \binom{i}{\frac{i}{2}} \right\} \cos(af) df \\ &= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{i}{2}-1} 2 \binom{i}{j} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left[ \cos(i-2j+a)f \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos(i-2j-a)f \right] df + \binom{i}{\frac{i}{2}} \int_0^{2\pi} \cos(af) df \right\} \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

La fonction trigonométrique  $\cos(af)$  aura une contribution nulle puisque  $a \in \mathbb{N}$  et  $a > 0$ . Les autres fonctions trigonométriques auront également une contribution nulle, excepté à nouveau dans les cas  $(*)$   $(i-2j+a) = 0 \leftrightarrow j = \frac{i+a}{2}$  et  $(**)$   $(i-2j-a) = 0 \leftrightarrow j = \frac{i-a}{2}$ . On en déduit comme précédemment que le seul cas à considérer est  $(**)$   $j = \frac{i-a}{2}$  avec  $i \geq a$ .

D'où (D.20) devient :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \cos(af) df = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{i-1}} \left( \frac{i}{2} \right) & \text{si } i \text{ et } a \text{ sont de même parité, et si } a \leq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

De plus, si l'on considère à présent l'intégration de la partie uniquement périodique, on a :

$$\begin{aligned} & \int_{pp} \cos^i(f) \cos(af) df \\ &= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{i}{2}-1} 2 \binom{i}{j} \int_{pp} \frac{1}{2} \left\{ \cos(i-2j+a)f + \cos(i-2j-a)f \right\} df \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{i}{2} \right) \int_{pp} \cos(af) df \Bigg\} \\
& = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\frac{i}{2}-1} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j+a)f}{i-2j+a} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\frac{i}{2}-1} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j-a)f}{i-2j-a} \right\} + \left( \frac{i}{2} \right) \frac{\sin(af)}{a} \right\} \quad (D.22)
\end{aligned}$$

□

Puisque (D.18) et (D.21) sont équivalents, la PROPOSITION 2 est valable pour  $i$  quelconque (pair ou impair) en ce qui concerne la partie constante. Concernant la partie périodique, (D.19) et (D.22) peuvent être rassemblées en :

$$\begin{aligned}
\int_{pp} \cos^i(f) \cos(af) df & = \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j+a)f}{i-2j+a} \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\sin(i-2j-a)f}{i-2j-a} \right\} + \lambda_i \left( \frac{i}{2} \right) \frac{\sin(af)}{a} \right\} \quad (D.23)
\end{aligned}$$

qui est à présent valable pour  $i$  quelconque (pair ou impair) en utilisant (D.2), de sorte que la PROPOSITION 2 est également valable pour  $i$  quelconque (pair ou impair) en ce qui concerne la partie périodique.

*Preuve alternative de la PROPOSITION 2 pour la partie constante ( $i$  pair ou impair).* On pourrait aussi considérer la relation suivante (voir **3.631** 9. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980]), valable pour  $\Re(\nu) > 0$  :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\nu-1}(x) \cos(ax) dx = \frac{\pi}{2^\nu \nu B\left(\frac{\nu+a+1}{2}, \frac{\nu-a+1}{2}\right)} = \frac{\pi}{2^\nu \nu} \frac{\nu+a+1}{2} \left( \frac{\nu-a-1}{2} \right) \quad (D.24)$$

un résultat qui fait appel à la fonction Beta  $B$  (l'intégrale d'Euler de première espèce), qui, dans le cas  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , se réduit à (voir **8.384** 6. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980]) :

$$\frac{1}{B(n, m)} = m \binom{n+m-1}{n-1} = n \binom{n+m-1}{m-1} \quad (D.25)$$

Si nous remplaçons à présent  $\nu - 1$  par  $i$  afin de pouvoir finalement comparer avec la PROPOSITION 2, et si nous utilisons la relation  $\binom{i+1}{n} = \frac{i+1}{i+1-n} \binom{i}{n}$  nous obtenons :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^i(x) \cos(ax) dx = \frac{\pi}{2^{i+1}} \left( \frac{i}{2} \right) \quad (D.26)$$

et on a donc bien finalement, grâce à des considérations de symétrie ( $\int_0^{2\pi} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ) :

$$\int_0^{2\pi} \cos^i(x) \cos(ax) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2^{i-1}} \left( \frac{i-a}{2} \right) & \text{si } i \text{ et } a \text{ sont de même parité, et si } a \leq i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (D.27)$$

□

### D.3 Calcul de $\int_{pp} \cos^i(f) \sin(af) df$ et $\int_0^{2\pi} \cos^i(f) \sin(af) df$

PROPOSITION 3.

Si l'on définit  $j^* = \frac{i-a}{2}$  et  $\lambda_i$  via (D.2), alors nous avons, pour  $i$  quelconque (pair ou impair) :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^i(f) \sin(af) df &= 0 \quad \text{pour } i, a \in \mathbb{N}, \\ \int_{pp} \cos^i(f) \sin(af) df &= \frac{1}{2^i} \left\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{-\cos(i-2j+a)f}{i-2j+a} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq j^*}}^{\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor} \binom{i}{j} \left\{ \frac{\cos(i-2j-a)f}{i-2j-a} \right\} - \lambda_i \left( \frac{i}{2} \right) \frac{\cos(af)}{a} \right\} \end{aligned}$$

*Preuve.* La preuve est très similaire à la preuve de la PROPOSITION 2. La fonction  $\cos^i f$  peut être développée comme précédemment via (D.5). Ensuite on utilise la formule  $2 \cos u \sin v = \sin(u+v) - \sin(u-v)$ , de sorte que nous n'obtenons plus que des fonctions trigonométriques sinus. Celles-ci auront une contribution nulle quand elles seront intégrées sur  $2\pi$ , tandis qu'elles donneront des fonctions cosinus lors de l'intégration pour la partie périodique.  $\square$

# Annexe E

## Séries caractéristiques

### E.1 Série $\gamma\mathcal{H}_{(2)}^\gamma$ de la perturbation terrestre (200 termes).

TAB. E.1: Série  $\gamma\mathcal{H}_{(2)}^\gamma$  de la perturbation terrestre (200 termes).

	$f$	$g$	$h$	$\lambda_{\mathbb{G}}$	$D$	$l_{\odot}$	$l_{\mathbb{G}}$	$F$	$\xi$	$a$	$c$	$s$	$\gamma$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.3739758380616887D+00
cos	2	2	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3739735605677257D+00
cos	0	0	2	-2	0	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3722499246447875D+00
cos	2	2	2	-2	0	0	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.1861249257528858D+00
cos	2	2	-2	2	0	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.1861249257528858D+00
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1246622573574725D+00
cos	0	0	2	-2	0	0	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.7127128504436235D-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	1	-2	2	1	1	1	0	0	- 0.6761673830951091D-01
cos	0	0	1	-1	0	0	0	-1	-2	2	1	1	1	0	0	0.6688525870879925D-01
cos	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.6120975113288258D-01
cos	2	2	-2	2	0	0	1	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.3563518396826681D-01
cos	2	2	2	-2	0	0	-1	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.3563518396826681D-01
cos	2	2	-1	1	0	0	0	-1	-2	2	0	1	1	1	0	- 0.3380836915475546D-01
cos	2	2	1	-1	0	0	0	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.3380836915475546D-01
cos	2	2	1	-1	0	0	0	-1	-2	2	0	1	1	1	0	- 0.3344262935439962D-01
cos	2	2	-1	1	0	0	0	1	-2	2	0	1	1	0	1	0.3344262935439962D-01
cos	2	2	0	0	0	0	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3060334819653109D-01
cos	2	2	0	0	0	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3060334819653109D-01
cos	0	0	0	0	0	0	1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.2037714054399151D-01
cos	0	0	2	-2	-2	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1355132661150810D-01
cos	0	0	1	-1	0	0	-1	-1	-2	2	1	1	1	0	0	0.1280586451333515D-01
cos	0	0	0	0	2	0	-1	0	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.1181009089080665D-01
cos	0	0	2	-2	-2	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1138241120990557D-01
cos	0	0	2	-2	0	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1048233905916264D-01
cos	0	0	0	0	2	0	0	0	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.9972582225396174D-02
cos	0	0	2	-2	0	0	-2	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.9429361112324900D-02
cos	2	2	-2	2	2	0	-1	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.6775663305754052D-02
cos	2	2	2	-2	-2	0	1	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.6775663305754052D-02
cos	2	2	-1	1	0	0	1	1	-2	2	0	1	1	0	1	0.6402932256667574D-02
cos	2	2	1	-1	0	0	-1	-1	-2	2	0	1	1	1	0	- 0.6402932256667574D-02
cos	2	2	0	0	2	0	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.5905045445403324D-02
cos	2	2	0	0	-2	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.5905045445403324D-02
cos	2	2	-2	2	2	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.5691201824581722D-02
cos	2	2	2	-2	-2	0	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.5691201824581722D-02
cos	0	0	1	-1	0	0	1	1	-2	2	1	1	1	0	0	- 0.5532967268650033D-02
cos	0	0	1	-1	0	0	-1	1	-2	2	1	1	1	0	0	- 0.5524509963672517D-02
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.5306730748415720D-02
cos	2	2	-2	2	0	0	-1	0	-2	2	0	0	1	0	2	0.5241169529581323D-02
cos	2	2	2	-2	0	0	1	0	-2	2	0	0	1	2	0	0.5241169529581323D-02
cos	2	2	0	0	2	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.4986291112698089D-02
cos	2	2	0	0	-2	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.4986291112698089D-02
cos	2	2	2	-2	0	0	-2	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.4709072476211926D-02
cos	2	2	-2	2	0	0	2	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.4709072476211926D-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.4507524960736290D-02
cos	0	0	0	0	2	0	-1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.3999746008635979D-02
cos	0	0	0	0	2	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.3377736448801962D-02
cos	2	2	1	-1	0	0	1	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.2766483634325017D-02

suite à la page suivante



suite de la page précédente																			
<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	$\lambda_{\odot}$	<i>D</i>	$l_{\odot}$	$l_{\odot}$	<i>F</i>	$\xi$	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>s</i>	$\gamma$	<i>c</i> <sub>+</sub>	<i>c</i> <sub>-</sub>	Coefficient				
cos	2	2	-1	1	0	0	-1	-1	-2	2	0	1	1	0	1	-0.2766483634325017	D-02		
cos	2	2	-1	1	0	0	1	-1	-2	2	0	1	1	0	1	-0.2762254981836259	D-02		
cos	2	2	1	-1	0	0	-1	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.2762254981836259	D-02		
cos	0	0	2	-2	-2	0	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.2739915480806300	D-02		
cos	0	0	2	-2	2	0	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.2738813690182345	D-02		
cos	2	2	0	0	0	0	2	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.2653365374207862	D-02		
cos	2	2	0	0	0	0	-2	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.2653365374207862	D-02		
cos	0	0	1	-1	-2	0	1	-1	-2	2	1	1	1	0	0	0.2439465428078756	D-02		
cos	2	2	0	0	0	0	0	-2	-2	2	0	2	1	0	0	-0.2255093835036418	D-02		
cos	2	2	0	0	0	0	0	2	-2	2	0	2	1	0	0	-0.2255093835036418	D-02		
cos	0	0	1	-1	-2	0	0	-1	-2	2	1	1	1	0	0	0.2035688850727142	D-02		
cos	0	0	1	-1	2	0	0	-1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.188021029362688	D-02		
cos	0	0	1	-1	0	0	1	-1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.1864563961874574	D-02		
cos	0	0	1	-1	0	0	-2	-1	-2	2	1	1	1	0	0	0.1693878350643451	D-02		
cos	0	0	0	0	2	0	1	0	-2	2	2	0	1	0	0	-0.1570205801888362	D-02		
cos	0	0	2	-2	0	0	0	2	-1	56629529237592	0	2	1	0	0	-0.1516629529237592	D-02		
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	-2	2	0	0	1	0	0	0.1500095090908518	D-02		
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1445574967801603	D-02		
cos	2	2	2	-2	-2	0	-1	0	-2	2	0	0	1	2	0	-0.1369907386587976	D-02		
cos	2	2	-2	2	2	0	1	0	-2	2	0	0	1	0	2	-0.1369907386587976	D-02		
cos	2	2	-2	2	-2	0	1	0	-2	2	0	0	1	0	2	0.1369420900181594	D-02		
cos	2	2	-2	2	2	0	-1	0	-2	2	0	0	1	2	0	0.1369420900181594	D-02		
cos	0	0	2	-2	0	-1	0	0	-2	29901783848903	0	2	0	0	0	0.1229901783848903	D-02		
cos	2	2	-1	1	2	0	-1	1	-2	0	1	1	0	1	0	0.1219732714039378	D-02		
cos	2	2	1	-1	-2	0	1	-1	-2	2	0	1	1	1	0	-0.1219732714039378	D-02		
cos	0	0	1	-1	-2	0	1	1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.1171557995615621	D-02		
cos	0	0	2	-2	0	1	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.1119668936596628	D-02		
cos	0	0	2	-2	2	0	-2	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1110762418151235	D-02		
cos	0	0	1	-1	2	0	-1	1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.1057868635872740	D-02		
cos	2	2	-1	1	2	0	0	1	-2	0	1	1	0	1	0	0.107844425363571	D-02		
cos	2	2	1	-1	-2	0	0	-1	-2	2	0	1	1	1	0	-0.1017844425363571	D-02		
cos	0	0	1	-1	-2	0	0	1	-2	2	1	1	1	0	0	0.9965495003818269	D-03		
cos	2	2	1	-1	2	0	0	-1	-2	2	0	1	1	1	0	0.9401105146813439	D-03		
cos	2	2	-1	1	-2	0	0	1	-2	2	0	1	1	0	1	-0.9401105146813439	D-03		
cos	2	2	-1	1	0	0	-1	1	-2	0	1	0	1	0	1	-0.9322819809372868	D-03		
cos	2	2	1	-1	0	0	1	-1	-2	2	0	1	1	0	0	0.9322819809372868	D-03		
cos	0	0	2	-2	0	0	-3	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.9020082718341703	D-03		
cos	0	0	1	-1	2	0	0	1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.8943726776226530	D-03		
cos	2	2	-1	1	0	0	2	1	-2	2	0	1	1	0	1	0.8469391753217257	D-03		
cos	2	2	1	-1	0	0	-2	-1	-2	2	0	1	1	1	0	-0.8469391753217257	D-03		
cos	2	2	0	0	-2	-2	0	-1	0	-2	2	0	41	1814	-03	-0.7851029009441814	D-03		
cos	2	2	0	0	2	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.7851029009441814	D-03		
cos	2	2	-2	2	0	0	0	-2	-2	2	0	0	0	2	0	-0.7583147646187959	D-03		
cos	2	2	2	-2	0	0	0	2	-2	2	0	0	1	2	0	-0.7583147646187959	D-03		
cos	0	0	2	-2	0	1	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.6594345165649732	D-03		
cos	0	0	0	0	2	-1	0	0	-2	2	44	31	2785	-03	0	-0.6582273434412785	D-03		
cos	0	0	2	-2	-2	1	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.6182399308459507	D-03		
cos	2	2	2	-2	0	-1	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	0.6149508919244518	D-03		
cos	2	2	-2	2	0	1	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	0.6149508919244518	D-03		
cos	2	2	-1	1	2	0	-1	-1	-2	2	0	1	1	0	1	-0.5857789978078102	D-03		
cos	2	2	1	-1	-2	0	1	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.5857789978078102	D-03		
cos	0	0	1	-1	2	0	-1	-1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.5814288789008544	D-03		
cos	0	0	0	0	0	0	1	2	-2	2	0	2	1	0	0	0.5730561717949057	D-03		
cos	2	2	-2	2	0	-1	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	-0.5598344682983140	D-03		
cos	2	2	2	-2	0	1	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	-0.5598344682983140	D-03		
cos	0	0	0	0	2	0	-2	0	-2	2	2	0	1	0	0	-0.5573365090234335	D-03		
cos	2	2	-2	2	-2	0	2	0	-2	2	0	0	1	0	2	0.5555235891356467	D-03		
cos	2	2	2	-2	-2	0	-2	0	-2	2	0	0	1	2	0	0.5555235891356467	D-03		
cos	2	2	1	-1	2	0	-1	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.5289343179363701	D-03		
cos	2	2	-1	1	-2	0	1	-1	-2	2	0	1	1	0	1	-0.5289343179363701	D-03		
cos	0	0	0	0	2	0	1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.5263714229696936	D-03		
cos	0	0	0	0	2	-1	-1	0	-2	2	2	0	1	0	0	-0.507449708550294	D-03		
cos	2	2	-1	1	2	0	0	-1	-2	2	0	1	1	0	1	0.4982747501909135	D-03		
cos	2	2	1	-1	-2	0	0	1	-2	2	0	1	1	1	0	-0.4982747501909135	D-03		
cos	0	0	1	-1	0	0	-2	1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.4533473827974540	D-03		
cos	0	0	1	-1	0	0	2	1	-2	2	1	1	1	0	0	-0.4526123861769367	D-03		
cos	2	2	-1	1	-2	0	0	-1	-2	2	0	1	1	0	1	-0.4471863388113265	D-03		
cos	2	2	1	-1	2	0	0	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.4471863388113265	D-03		
cos	0	0	0	0	0	0	3	0	-2	2	2	0	1	0	0	-0.4237506106334375	D-03		
cos	0	0	2	-2	-2	-2	1	0	0	-46092529139313	0	0	0	0	0	-0.4046092529139313	D-03		
cos	2	2	2	-2	0	0	0	-3	0	-382450950553316	-03	0	2	0	0	-0.382450950553316	D-03		
cos	2	2	-2	2	0	0	3	0	-2	2	0	0	1	0	2	-0.382450950553316	D-03		
cos	0	0	0	0	0	1	-1	0	-2	2	2	0	1	0	0	-0.3760528247556417	D-03		
cos	0	0	2	-2	-4	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.3374524946236831	D-03		
cos	0	0	1	-1	-2	0	-1	-1	-2	2	1	1	0	0	0	0.3305259193630003	D-03		
cos	2	2	2	-2	0	1	-1	0	-2	2	0	0	1	2	0	-0.3297172582824866	D-03		
cos	2	2	-2	2	0	-1	1	0	-2	2	0	0	1	0	2	-0.3297172582824866	D-03		
cos	2	2	0	0	2	-1	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	-0.3291136721706394	D-03		
suite à la page suivante																			

*suite à la page suivante*

suite de la page précédente															Coefficient	
	$f$	$g$	$h$	$\lambda_g$	$D$	$l_\odot$	$l_g$	$F$	$\xi$	$a$	$c$	$s$	$\gamma$	$c_+$	$c_-$	
cos	2	2	0	0	-2	1	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3291136721706394D-03
cos	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	2	2	0	1	0	0	0.3272744826995994D-03
cos	0	0	2	-2	-2	0	-2	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3238713990646839D-03
cos	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	2	2	0	0	1	0	- 0.3152377126606438D-03
cos	0	0	0	0	0	1	1	0	-2	2	2	0	1	0	0	0.3132452843093082D-03
cos	0	0	2	-2	2	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.3108865556150111D-03
cos	2	2	2	-2	-2	1	1	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.3091199654229754D-03
cos	2	2	-2	2	2	-1	-1	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.3091199654229754D-03
cos	0	0	0	0	4	0	-1	0	-2	2	2	0	1	0	0	- 0.3008503797970431D-03
cos	2	2	1	-1	2	0	-1	-1	-2	2	0	1	1	1	0	0.2907144394504272D-03
cos	2	2	-1	1	-2	0	1	1	-2	2	0	1	1	0	1	- 0.2907144394504272D-03
cos	2	2	0	0	0	0	-1	-2	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2867371661406912D-03
cos	2	2	0	0	0	0	1	2	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2867371661406912D-03
cos	0	0	2	-2	0	0	2	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2795624407516542D-03
cos	2	2	0	0	2	0	-2	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2786682545117169D-03
cos	2	2	0	0	-2	0	2	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2786682545117169D-03
cos	0	0	2	-2	0	-1	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.2572835472209494D-03
cos	0	0	0	0	4	0	-2	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.2561649778891421D-03
cos	2	2	0	0	-2	1	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2537247354275147D-03
cos	2	2	0	0	2	-1	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2537247354275147D-03
cos	0	0	2	-2	2	-1	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2519490682866433D-03
cos	2	2	1	-1	0	0	-2	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.2266736913987270D-03
cos	2	2	-1	1	0	0	2	-1	-2	2	0	1	1	0	1	- 0.2266736913987270D-03
cos	2	2	1	-1	0	0	2	1	-2	2	0	1	1	1	0	0.2263061930884684D-03
cos	2	2	-1	1	0	0	-2	-1	-2	2	0	1	1	0	1	- 0.2263061930884684D-03
cos	0	0	0	0	2	-1	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.2229423227588689D-03
cos	2	2	0	0	0	0	-3	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2118753053167188D-03
cos	2	2	0	0	0	0	3	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.2118753053167188D-03
cos	0	0	0	0	2	0	2	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.2069642509110512D-03
cos	2	2	-2	2	2	-1	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.2023046264569657D-03
cos	2	2	2	-2	-2	1	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.2023046264569657D-03
cos	0	0	2	-2	-4	0	2	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1989239900367873D-03
cos	2	2	0	0	0	-1	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1880264123778209D-03
cos	2	2	0	0	0	1	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1880264123778209D-03
cos	0	0	0	0	2	0	-2	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1841343265468596D-03
cos	0	0	2	-2	-4	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1725113439818320D-03
cos	0	0	0	0	2	-1	-1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1718552316106484D-03
cos	2	2	-2	2	4	0	-1	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.1687262473118416D-03
cos	2	2	2	-2	-4	0	1	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.1687262473118416D-03
cos	0	0	2	-2	-1	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1665241753351260D-03
cos	0	0	0	0	2	0	0	-2	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1660575631474684D-03
cos	2	2	1	-1	-2	0	-1	-1	-2	2	0	1	1	1	0	- 0.1652629596815002D-03
cos	2	2	-1	1	2	0	1	1	-2	2	0	1	1	0	1	0.1652629596815002D-03
cos	2	2	0	0	1	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1636372413497998D-03
cos	2	2	0	0	-1	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1636372413497998D-03
cos	2	2	-2	2	2	0	2	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.1608620421921301D-03
cos	2	2	2	-2	-2	0	-2	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.1608620421921301D-03
cos	0	0	0	0	0	1	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	- 0.1594948681120635D-03
cos	0	0	2	-2	1	0	0	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1573315115677862D-03
cos	2	2	0	0	0	-1	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1566226421546541D-03
cos	2	2	0	0	0	1	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1566226421546541D-03
cos	2	2	2	-2	2	0	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.1554432778075051D-03
cos	2	2	-2	2	-2	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.1554432778075051D-03
cos	0	0	0	0	4	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1525002125290847D-03
cos	2	2	0	0	4	0	-1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1504251898985216D-03
cos	2	2	0	0	-4	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1504251898985216D-03
cos	0	0	0	0	2	1	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	- 0.1425043047690308D-03
cos	2	2	2	-2	0	0	2	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.1397812203758269D-03
cos	2	2	-2	2	0	0	-2	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.1397812203758269D-03
cos	0	0	2	-2	2	0	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1311698331195358D-03
cos	2	2	-2	2	0	1	1	0	-2	2	0	0	1	0	2	0.1286454732854862D-03
cos	2	2	2	-2	0	-1	-1	0	-2	2	0	0	1	2	0	0.1286454732854862D-03
cos	0	0	2	-2	-2	0	2	0	-2	2	0	2	1	0	0	0.1277344049447981D-03
cos	0	0	0	0	0	1	-1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1275287156177089D-03
cos	2	2	-2	2	-2	1	0	0	-2	2	0	0	1	0	2	- 0.1259745341433216D-03
cos	2	2	2	-2	2	-1	0	0	-2	2	0	0	1	2	0	- 0.1259745341433216D-03
cos	0	0	2	-2	0	0	1	2	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1226576033127821D-03
cos	0	0	2	-2	0	0	1	-2	-2	2	0	2	1	0	0	0.1162467969692300D-03
cos	0	0	0	0	0	0	3	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1147433149670730D-03
cos	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	- 0.1108594706179804D-03
cos	0	0	0	0	0	1	1	0	-2	2	0	0	1	0	0	- 0.1062828846076880D-03
cos	0	0	0	0	2	1	-1	0	-2	2	0	0	1	0	0	- 0.1037877258069515D-03
cos	0	0	0	0	2	-1	1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1029397393791579D-03
cos	0	0	0	0	4	0	-1	0	-2	2	0	0	1	0	0	0.1019086901135888D-03
cos	0	0	2	-2	0	-1	1	0	-2	2	0	2	1	0	0	- 0.1017427495012966D-03

E.2 Série  $a = \bar{a} + \dots$  (96 termes).TAB. E.2: Série  $a = \bar{a} + \dots$  (96 termes).

	$f$	$g$	$h$	$\lambda_q$	$u$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	$\gamma$	$c_+$	$\beta$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.10000D+01
cos	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- 0.24932D+00
cos	0	0	0	0	0	0	1	-2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.74795D+00
cos	0	0	0	0	0	0	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- 0.37399D+00
cos	0	0	0	0	0	0	1	-2	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.11219D+01
cos	0	0	0	0	0	1	1	-2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.24932D+00
cos	0	0	0	0	0	1	1	-2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	- 0.74795D+00
cos	0	0	0	0	0	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.37399D+00
cos	0	0	0	0	0	1	1	-2	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	- 0.11219D+01
cos	0	0	0	0	1	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- 0.74797D+00
cos	0	0	0	0	1	1	1	-2	1	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.22439D+01
cos	0	0	0	0	1	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- 0.18699D+00
cos	0	0	0	0	1	1	1	-2	3	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.56096D+00
cos	0	0	0	0	2	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.37399D+00
cos	0	0	0	0	2	1	1	-2	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	- 0.11219D+01
cos	0	0	0	0	3	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	0	- 0.62331D-01
cos	0	0	0	0	3	1	1	-2	3	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.18699D+00
cos	0	0	2	-2	0	0	1	-2	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.74450D+00
cos	0	0	2	-2	0	0	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.11167D+01
cos	0	0	2	-2	0	1	1	-2	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.74450D+00
cos	0	0	2	-2	0	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.11167D+01
cos	0	0	2	-2	1	1	1	-2	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.11167D+01
cos	0	0	2	-2	1	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.27919D+00
cos	0	0	2	-2	2	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.55837D+00
cos	0	0	2	-2	3	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.93062D-01
cos	0	0	2	-2	-1	1	1	-2	1	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.11167D+01
cos	0	0	2	-2	-1	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.27919D+00
cos	0	0	2	-2	-2	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.55837D+00
cos	0	0	2	-2	-3	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.93062D-01
cos	0	2	0	0	0	0	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.18699D+01
cos	0	2	0	0	0	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.18699D+01
cos	0	2	0	0	1	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	-1	0	0.93493D+00
cos	0	2	0	0	1	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.46747D+00
cos	0	2	0	0	2	1	1	-2	1	0	0	2	0	0	1	0	-1	0	- 0.37397D+00
cos	0	2	0	0	2	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.18699D+00
cos	0	2	0	0	2	1	1	-2	2	1	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.37397D+00
cos	0	2	0	0	3	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	-1	0	0.18699D+00
cos	0	2	0	0	3	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.93493D-01
cos	0	2	0	0	-1	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	1	0	0.93493D+00
cos	0	2	0	0	-1	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0.46747D+00
cos	0	2	0	0	-2	1	1	-2	1	0	0	2	0	0	1	0	1	0	- 0.37397D+00
cos	0	2	0	0	-2	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.18699D+00
cos	0	2	0	0	-2	1	1	-2	2	1	0	2	0	0	1	0	0	0	0.37397D+00
cos	0	2	0	0	-3	1	1	-2	2	0	0	2	0	0	1	0	1	0	0.18699D+00
cos	0	2	0	0	-3	1	1	-2	3	0	0	2	0	0	1	0	0	0	- 0.93493D-01
cos	0	2	2	-2	0	0	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0.93062D+00
cos	0	2	2	-2	0	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	- 0.93062D+00
cos	0	2	2	-2	1	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	-1	0	0.46531D+00
cos	0	2	2	-2	1	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0.23266D+00
cos	0	2	2	-2	2	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	1	2	-1	0	- 0.18612D+00
cos	0	2	2	-2	2	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	- 0.93062D-01
cos	0	2	2	-2	2	1	1	-2	2	1	0	0	0	0	1	2	0	0	- 0.18612D+00
cos	0	2	2	-2	3	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	-1	0	0.93062D-01
cos	0	2	2	-2	3	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	2	0	0	- 0.46531D-01
cos	0	2	2	-2	-1	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0.46531D+00
cos	0	2	2	-2	-1	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0.23266D+00
cos	0	2	2	-2	-2	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	1	2	1	0	- 0.18612D+00
cos	0	2	2	-2	-2	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	- 0.93062D-01
cos	0	2	2	-2	-2	1	1	-2	2	1	0	0	0	0	1	2	0	0	0.18612D+00
cos	0	2	2	-2	-3	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	2	1	0	0.93062D-01
cos	0	2	2	-2	-3	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	2	0	0	- 0.46531D-01
cos	0	2	-2	2	0	0	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0.93062D+00
cos	0	2	-2	2	0	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	- 0.93062D+00
cos	0	2	-2	2	1	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	-1	2	0.46531D+00
cos	0	2	-2	2	1	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0.23266D+00
cos	0	2	-2	2	2	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	1	0	-1	2	- 0.18612D+00
cos	0	2	-2	2	2	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	- 0.93062D-01
cos	0	2	-2	2	2	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	2	- 0.46531D-01
cos	0	2	-2	2	-1	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0.46531D+00
cos	0	2	-2	2	-1	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0.23266D+00
cos	0	2	-2	2	-2	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	2	- 0.18612D+00
cos	0	2	-2	2	-2	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	-1	2	0.93062D-01
cos	0	2	-2	2	3	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	2	- 0.46531D-01
cos	0	2	-2	2	-1	1	1	-2	2	0	0	0	0	0	1	0	1	2	0.46531D+00
cos	0	2	-2	2	-1	1	1	-2	3	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0.23266D+00
cos	0	2	-2	2	-2	1	1	-2	1	0	0	0	0	0	1	0	1	2	- 0.18612D+00

suite à la page suivante

suite de la page précédente																		Coefficient
$f$	$g$	$h$	$\lambda_{\mathcal{G}}$	$u$	$\xi$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	$\gamma$	$c_+$	$\beta$	$c_-$	
cos	0	2	-2	2	-2	1	1	-2	2	0	0	0	0	1	0	0	2	- 0.93062D-01
cos	0	2	-2	2	-2	1	1	-2	2	1	0	0	0	1	0	0	2	0.18612D+00
cos	0	2	-2	2	-3	1	1	-2	2	0	0	0	0	1	0	1	2	0.93062D-01
cos	0	2	-2	2	-3	1	1	-2	3	0	0	0	0	1	0	0	2	- 0.46531D-01
cos	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-3	0	0	0	1	0	0	0	0.50000D+00
cos	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	-3	2	0	0	1	0	0	0	- 0.15000D+01
cos	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	-2	0	0	0	1	0	0	0	- 0.50000D+00
cos	0	0	0	0	0	2	-1	0	0	-2	2	0	0	1	0	0	0	0.15000D+01
cos	1	0	0	0	0	2	-1	0	1	-2	0	0	0	1	0	0	0	- 0.50000D+00
cos	1	0	0	0	0	2	-1	0	1	-2	2	0	0	1	0	0	0	0.15000D+01
cos	1	2	0	0	0	2	-1	0	1	-2	0	2	0	1	0	0	0	0.75000D+00
cos	2	2	0	0	0	2	-1	0	0	-2	0	2	0	1	0	0	0	0.15000D+01
cos	3	2	0	0	0	2	-1	0	1	-2	0	2	0	1	0	0	0	0.75000D+00
cos	0	0	2	0	0	0	-1	0	0	-3	0	2	1	0	0	0	0	0.30000D+01
cos	0	0	2	0	0	2	-1	0	0	-2	0	2	1	0	0	0	0	- 0.30000D+01
cos	1	0	2	0	0	2	-1	0	1	-2	0	2	1	0	0	0	0	- 0.15000D+01
cos	1	0	-2	0	0	2	-1	0	1	-2	0	2	1	0	0	0	0	- 0.15000D+01
cos	1	2	2	0	0	2	-1	0	1	-2	0	0	1	0	0	2	0	- 0.75000D+00
cos	1	2	-2	0	0	2	-1	0	1	-2	0	0	1	0	0	0	2	- 0.75000D+00
cos	2	2	2	0	0	2	-1	0	0	-2	0	0	1	0	0	2	0	- 0.15000D+01
cos	2	2	-2	0	0	2	-1	0	0	-2	0	0	1	0	0	0	2	- 0.15000D+01
cos	3	2	2	0	0	2	-1	0	1	-2	0	0	1	0	0	2	0	- 0.75000D+00
cos	3	2	-2	0	0	2	-1	0	1	-2	0	0	1	0	0	0	2	- 0.75000D+00

E.3 Série  $\bar{\mathcal{H}}$  (164 termes).TAB. E.3: Série  $\bar{\mathcal{H}}$  (164 termes).

$g$	$h$	$\lambda_{\mathcal{G}}$	$D$	$l_{\odot}$	$l_{\mathcal{G}}$	$F$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\bar{n}_{\mathcal{G}}$	$\bar{e}$	$\bar{\gamma}$	$c_+$	$H$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-0.4023792862141359D-02
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-3	2	0	0	0	1	0	0	0	0	-0.1524000000000000D-03
cos	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-3	0	0	0	0	1	0	0	0	0.5080000000000002D-04
cos	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	-3	0	2	1	0	0	0	0	0	-0.3354000000000000D-04
cos	2	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	-0.1492154506665225D-04
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.8952981563196831D-05
cos	0	2	-2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	1	0	0	0	-0.8911663195996214D-05
cos	2	-2	2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	-0.7426384537540144D-05
cos	2	2	-2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	-0.7426384537540144D-05
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	-0.5968654375464553D-05
cos	0	2	-2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	-0.5941108797330810D-05
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.2984414441137892D-05
cos	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0.1989609627425261D-05
cos	0	2	-2	0	0	-1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	-0.1706234563962035D-05
cos	0	1	-1	0	0	0	1	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-0.1618744715129691D-05
cos	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0.1601233093488654D-05
cos	0	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	1	0	0	-0.1465361442121209D-05
cos	2	-2	2	0	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	-0.1421843840333846D-05
cos	2	2	-2	0	0	-1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	-0.1421843840333846D-05
cos	2	1	-1	0	0	0	1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0.1348953929274743D-05
cos	2	-1	1	0	0	-1	0	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	1	-0.1348953929274743D-05
cos	2	1	-1	0	0	-1	0	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	-0.1334360911240545D-05
cos	2	-1	1	0	0	0	1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0.1334360911240545D-05
cos	2	0	0	0	0	-1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	-0.1221073593041590D-05
cos	2	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	-0.1221073593041590D-05
cos	0	2	-2	0	0	-1	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	-0.1137489709308023D-05
cos	0	1	-1	0	0	0	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	-0.1079163143419794D-05
cos	0	1	-1	0	0	-1	0	2	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0.1067488728992436D-05
cos	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.9769076280808060D-06
cos	0	0	0	0	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.4878287446231568D-06
cos	2	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	-9	2	2	0	0	2	0	0	0	0.3870960000000000D-06
cos	0	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0.3252191630821045D-06
cos	0	2	-2	-2	0	1	0	2	0	2	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.3244187590795040D-06
cos	0	1	-1	0	0	-1	-1	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0.3065723964492435D-06
cos	0	0	0	2	0	-1	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	1	0	0	-0.2827335759259111D-06
cos	0	2	-2	-2	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	-0.2724949243651395D-06
cos	2	2	-2	-2	0	1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	-0.2703489658995867D-06
cos	2	-2	2	2	0	-1	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	2	-0.2703489658995867D-06
cos	2	1	-1	0	0	-1	-1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	-0.2554769970410362D-06
cos	2	-1	1	0	0	1	1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0.2554769970410362D-06
cos	0	2	-2	0	0	1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0.2509471970763537D-06
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	2	-9	2	0	0	0	2	0	0	0	-0.2419350000000001D-06
cos	0	0	0	2	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.2387436184759844D-06
cos	2	0	0	2	0	-1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	-0.2356113132715926D-06

*suite à la page suivante*

*suite à la page suivante*

suite de la page précédente																				Coefficient			
	$g$	$h$	$\lambda_{\mathbb{G}}$	$D$	$l_{\odot}$	$l_{\mathbb{G}}$	$F$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\bar{\delta}$	$\bar{n}_{\mathbb{G}}$	$\bar{e}$	$\bar{\gamma}$	$c_+$	$H$	$c_-$			
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	-9	2	0	0	0	2	0	0	0	0	-0.3483864000000001	D-07	
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.3460706472917036	D-07	
cos	2	-1	1	0	0	2	1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0.3379287309533686	D-07	
cos	2	1	-1	0	0	-2	-1	2	0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0.3379287309533686	D-07	
cos	0	1	-1	-2	0	0	-1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.3248959405760520	D-07	
cos	2	0	0	2	0	1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.3132560574767284	D-07	
cos	2	0	0	-2	0	-1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.3132560574767284	D-07	
cos	0	2	0	0	0	0	0	-2	2	0	-6	2	2	1	0	1	0	0	0	0	-0.3066897600000000	D-07	
cos	0	2	0	0	0	0	0	-2	2	0	-9	2	2	1	0	1	0	0	0	0	0.3066897600000000	D-07	
cos	2	2	-2	0	0	0	2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	2	0	0	-0.3025675910828995	D-07	
cos	2	-2	2	0	0	0	-2	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	-0.3025675910828995	D-07	
cos	0	1	-1	2	0	0	-1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.3000832762862849	D-07	
cos	0	1	-1	0	0	1	-1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.2975844083151820	D-07	
cos	0	2	-2	0	-1	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.2944384870534275	D-07	
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	4	-9	2	0	0	0	2	0	0	0	0	-0.2806446000000000	D-07	
cos	0	1	-1	-2	0	1	1	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.2804709841503795	D-07	
cos	0	1	-1	0	0	-2	-1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0.2703429847626948	D-07	
cos	0	2	-2	0	1	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.2680487434212327	D-07	
cos	0	2	-2	0	0	-2	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.2659165229054056	D-07	
cos	0	1	-1	2	0	-1	1	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.2532537514279340	D-07	
cos	0	0	0	2	0	1	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.2506048459813826	D-07	
cos	0	2	-2	0	0	0	2	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.2420540728663197	D-07	
cos	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.2394151765089994	D-07	
cos	0	1	-1	-2	0	0	1	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0.2385739503914094	D-07	
cos	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0.2307137648611358	D-07	
cos	0	2	-2	0	0	-3	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.2159407802771004	D-07	
cos	0	1	-1	2	0	0	1	2	0	2	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.214112819028631	D-07	
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	4	-9	4	0	0	0	0	2	0	0	0	0.2044350750000001	D-07	
cos	0	2	-2	0	-1	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.1962923247022850	D-07	
cos	0	1	-1	-2	0	1	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.1869806561002531	D-07	
cos	0	2	-2	0	1	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.1786991622808218	D-07	
cos	0	2	-2	2	0	-2	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0.1772776819369371	D-07	
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	0	-9	4	0	0	0	2	0	0	0	0	-0.1741932000000001	D-07	
cos	0	1	-1	2	0	-1	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.16883358342852893	D-07	
cos	0	1	-1	-2	0	0	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0.1590493002609396	D-07	
cos	0	2	-2	0	1	-1	0	2	0	2	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.1578686232656546	D-07	
cos	0	0	0	2	-1	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.1575796262353021	D-07	
cos	0	2	-2	0	0	-3	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	0.1439605201847336	D-07	
cos	0	1	-1	2	0	0	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	-0.1427418793485754	D-07	
cos	0	0	0	0	0	0	0	-2	2	4	-9	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0.1306449000000000	D-07	
cos	0	2	-2	0	1	-1	0	2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	0	0	0	-0.1052457488437697	D-07	
cos	0	0	0	2	-1	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	0	1	0	0	0	-0.1050530841568680	D-07	

E.4 Série  $\bar{\mathcal{H}}$  (30 termes).TAB. E.4: Série  $\bar{\mathcal{H}}$  (30 termes).

	$g$	$h$	$\lambda_{\mathbb{G}}$	$l_{\mathbb{G}}$	$F$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\bar{\delta}$	$\bar{e}$	$\bar{\gamma}$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	-3	2	0	0	1	0	0	0	-0.3787471304347825D-01
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	-3	0	0	0	1	0	0	0	0.1262490434782609D-01
cos	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	2	0	0	1	0	-0.3708328330477576D-02
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0	0	1	0	-0.2225010548488395D-02
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0	0	1	0	-0.1483340365658930D-02
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	1	0	0.7416918671975734D-03
cos	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0.4944612447983819D-03
cos	2	0	0	0	0	-2	2	0	-9	2	2	0	2	0	0	0	0.9620177113043477D-04
cos	0	0	0	0	0	-2	3	0	-7	1	2	2	0	0	0	0	-0.6947921208001813D-04
cos	0	0	0	0	0	-2	2	2	-9	2	0	0	2	0	0	0	-0.6012610695652175D-04
cos	0	0	0	0	0	-2	2	2	-9	4	0	0	2	0	0	0	0.4605659792869565D-04
cos	2	0	0	0	0	-2	2	-2	-9	2	2	0	2	0	0	0	-0.3848070845217391D-04
cos	2	0	0	0	0	-2	2	-2	-4	2	2	0	2	0	0	0	0.3848070845217391D-04
cos	2	0	0	0	0	-2	2	2	-9	2	2	0	2	0	0	0	-0.3824020402434782D-04
cos	0	1	-1	1	1	2	0	2	0	1	1	0	0	1	0	0	-0.3291899979687086D-04
cos	2	1	-1	1	1	2	0	2	0	0	1	0	0	1	1	0	0.2743249983072573D-04
cos	2	-1	1	-1	-1	2	0	2	0	0	1	0	0	1	0	1	-0.2743249983072573D-04
cos	0	1	-1	1	1	2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	-0.2194599986458057D-04
cos	0	0	0	0	0	-2	2	2	-9	0	0	0	2	0	0	0	0.1298723910260870D-04
cos	0	0	0	0	0	-2	2	0	-6	2	0	0	2	0	0	0	0.1154421253565218D-04
cos	2	0	0	0	0	-2	2	4	-9	2	2	0	2	0	0	0	0.9920807647826090D-05
cos	2	0	0	0	0	-2	2	2	-9	0	2	0	2	0	0	0	-0.8658159401739134D-05
cos	0	0	0	0	0	-2	2	0	-6	4	0	0	2	0	0	0	-0.8658159401739134D-05
cos	0	0	0	0	0	-2	2	0	-9	2	0	0	2	0	0	0	-0.8658159401739134D-05
cos	0	0	0	0	0	-4	4	0	-11	2	2	2	1	0	0	0	0.7017347253380411D-05

suite de la page précédente																	
	$g$	$h$	$\lambda_{\mathfrak{g}}$	$l_{\mathfrak{g}}$	$F$	$a$	$n$	$e$	$\eta$	$c$	$s$	$\delta$	$\epsilon$	$\gamma$	$c_+$	$c_-$	Coefficient
cos	0	0	0	0	0	-2	2	4	-9	2	0	0	2	0	0	0	- 0.6974628406956526 $D-05$
cos	0	0	0	0	0	-2	2	4	-9	4	0	0	2	0	0	0	0.5080656037826089 $D-05$
cos	0	0	0	0	0	-2	2	0	-9	4	0	0	2	0	0	0	- 0.4329079700869568 $D-05$
cos	0	0	0	0	0	2	-1	2	-1	1	2	0	0	2	0	0	- 0.3270257456370797 $D-05$
cos	0	0	0	0	0	-2	2	4	-9	0	0	0	2	0	0	0	0.3246809775652173 $D-05$

## Annexe F

### Calcul de $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$ et $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$

Dans cette annexe, nous calculons l'expression analytique fermée explicite de valeurs moyennes d'une classe de fonctions qui apparaît au premier et second ordre des théories de perturbations dues à un troisième corps dans le mouvement elliptique (voir Chapitre 8).

Avant tout, réduisons les deux cas généraux en 4 cas plus simples :

$$\begin{aligned} \langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle &= \langle \xi^{-n} \cos kf \cos \alpha - \xi^{-n} \sin kf \sin \alpha \rangle \\ &= C \cos \alpha - S \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{F.1})$$

$$\begin{aligned} \langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle &= \langle \xi^{-n} \psi \sin kf \cos \alpha + \xi^{-n} \psi \cos kf \sin \alpha \rangle \\ &= SS \cos \alpha + CC \sin \alpha \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

avec  $\xi = a/r$ ,  $\psi = u - l$ ,  $C = \langle \xi^{-n} \cos kf \rangle$ ,  $S = \langle \xi^{-n} \sin kf \rangle$ ,  $CC = \langle \xi^{-n} \psi \cos kf \rangle$ , et  $SS = \langle \xi^{-n} \psi \sin kf \rangle$ .

Nous avons divisé le travail en plusieurs parties : nous calculons  $C$  et  $S$  respectivement aux §F.1 et §F.2 ; le cas  $k = 0$  nécessite un petit traitement spécial présenté au §F.3 ; des expressions explicites de  $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$  sont données au §F.4, où la validité des formules analytiques a aussi été vérifiée. Nous calculons ensuite  $SS$  et  $CC$  respectivement aux §F.5 et §F.6 ; le cas  $k = 0$  nécessite à nouveau un traitement spécial au §F.7 ; des expressions explicites de  $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$  sont données au §F.8, où la validité des formules analytiques a été vérifiée.

#### F.1 Calcul de $C = \langle \xi^{-n} \cos kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$

L'exposant de  $\xi$  étant négatif, il est intéressant de transformer l'intégration en  $l$  en une intégration en  $u$ , puisque nous avons par (5.9) :

$$\xi = \frac{a}{r} = \frac{1 + e \cos f}{\eta^2} = \frac{1}{1 - e \cos u} \quad (\text{F.3})$$

et par TAB 5.1 :

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \xi \quad (\text{F.4})$$

de sorte que nous avons :

$$C = \langle \xi^{-n} \cos kf \rangle_l = \langle \xi^{-n-1} \cos kf \rangle_u \quad (\text{F.5})$$



A présent, nous devons exprimer  $\cos kf$  comme une fonction de  $u$ . On développe tout d'abord  $\cos kf$  via les polynômes de Chebyshev, ce qui se trouve facilement, comme par exemple dans **1.331** 3. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980], ou sous une forme plus compacte dans [Kelly, 1989] :

$$\cos kf = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} (\cos f)^{k-2i} \quad (\text{F.6})$$

avec  $b_i^{(k)} = (-1)^i \left(\frac{k}{2}\right) \frac{(k-i-1)!}{i!(k-2i)!} 2^{k-2i}$ . Attention au fait que cette formule n'est valable que pour  $k \geq 1$  (le cas  $k = 0$  sera considéré au §F.3).

En même temps, on évite d'introduire à nouveau  $f$  en utilisant les relations classiques (1.5) et (1.6) du problème des 2 corps entre les anomalies :

$$\begin{aligned} \cos f &= \xi(\cos u - e) \\ \sin f &= \xi\eta \sin u \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

de sorte que nous aboutissons à :

$$C = \langle \xi^{-n-1} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} (\xi(\cos u - e))^{k-2i} \rangle_u = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \langle \xi^{-n-1+k-2i} (\cos u - e)^{k-2i} \rangle_u \quad (\text{F.8})$$

De façon à intégrer facilement par rapport à  $u$ , nous devons imposer deux contraintes sur les exposants : i)  $(-n-1+k-2i) \leq 0$  et ii)  $(k-2i) \geq 0$ . L'inégalité ii) est toujours satisfaite tandis que i) peut être convertie en  $k \leq n+1$ .

Ainsi nous pouvons réécrire (F.8), en utilisant  $\xi(u)$  donné par (F.3) :

$$C = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \langle (1 - e \cos u)^{n+1-k+2i} (\cos u - e)^{k-2i} \rangle_u \quad (\text{F.9})$$

A présent on utilise la formule de Newton (6.17) :

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n x^i y^{n-i} \binom{n}{i} \quad (\text{F.10})$$

où  $\binom{n}{i}$  signifie  $\frac{n!}{i!(n-i)!}$ , de façon à développer les deux binômes de (F.9) :

$$\begin{aligned} C &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \left\langle \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} (-e \cos u)^p \alpha_p \sum_{q=0}^{k-2i} (\cos u)^q (-e)^{k-2i-q} \alpha_q \right\rangle_u \\ &= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} (-e)^p \alpha_p \sum_{q=0}^{k-2i} (-e)^{k-2i-q} \alpha_q \langle \cos^{p+q} u \rangle_u \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

où nous utilisons les notations  $\alpha_p = \binom{n+1-k+2i}{p}$  et  $\alpha_q = \binom{k-2i}{q}$ .

La valeur moyenne  $\langle \cos^{p+q} u \rangle_u$  peut être calculée en utilisant (D.8) :

$$\langle \cos^i x \rangle_x = \frac{\lambda_i}{2^i} \left( \frac{i}{2} \right) \quad (\text{F.12})$$

où l'on définit  $\lambda_i$  via (D.2). La seule contribution non nulle vient donc des termes avec  $(p+q)$  pair, de sorte que nous pouvons écrire la forme finale :

$$C = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} \alpha_p \sum_{\substack{q=\pi_p \\ \text{par } 2}}^{k-2i} \alpha_q (-e)^{p-q+k-2i} \frac{1}{2^{p+q}} \binom{p+q}{\frac{p+q}{2}} \quad (\text{F.13})$$

où la parité de  $p$  est  $\pi_p$ .

## F.2 Calcul de $S = \langle \xi^{-n} \sin kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$

On peut effectuer le même genre de développements pour  $\sin kf$  que ceux que nous avons faits pour  $\cos kf$  en (F.6) :

$$\sin kf = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} (\sin f) (\cos f)^{k-2i-1} \quad (\text{F.14})$$

avec  $d_i^{(k)} = (-1)^i \binom{k-i-1}{i} 2^{k-2i-1}$  (notons qu'on a  $(k-2i) b_i^{(k)} = k d_i^{(k)}$ ). Attention à nouveau au fait que cette formule n'est valable que pour  $k \geq 1$ . En faisant le même genre de manipulations qu'au §F.1, on calcule successivement :

$$\begin{aligned} S &= \langle \xi^{-n} \sin kf \rangle_l \\ &= \langle \xi^{-n-1} \sin kf \rangle_u \\ &= \langle \xi^{-n-1} (\xi \eta \sin u) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} (\xi (\cos u - e))^{k-2i-1} \rangle_u \\ &= \eta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \langle \xi^{-n+k-2i-1} (\sin u) (\cos u - e)^{k-2i-1} \rangle_u \\ &= \eta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \langle (1 - e \cos u)^{n-k+2i+1} (\sin u) (\cos u - e)^{k-2i-1} \rangle_u \\ &= \eta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \left\langle \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} (-e \cos u)^p \alpha_p (\sin u) \sum_{q=0}^{k-2i-1} (\cos u)^q (-e)^{k-2i-1-q} \beta_q \right\rangle_u \\ &= \eta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} (-e)^p \alpha_p \sum_{q=0}^{k-2i-1} (-e)^{k-2i-1-q} \beta_q \langle \cos^{p+q} u \sin u \rangle_u \quad (\text{F.15}) \end{aligned}$$

où nous utilisons la notation supplémentaire  $\beta_q = \binom{k-2i-1}{q}$ .

L'expression  $\langle \cos^{p+q} u \sin u \rangle_u$  peut être évaluée en développant  $\cos^{p+q} u$  en :

$$\cos^{2r} u = \frac{1}{2^{2r}} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} 2 \binom{2r}{j} \cos 2(r-j)u + \binom{2r}{r} \right\} \quad (\text{F.16})$$

$$\cos^{2r-1} u = \frac{1}{2^{2r-2}} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{2r-1}{j} \cos(2r-2j-1)u \quad (\text{F.17})$$

que l'on peut trouver dans 1.320 1. de [Gradshteyn and Ryzhik, 1980]. Donc, indépendamment de la parité de  $(p+q)$ , nous aurons des produits du genre

$$\cos au \sin u = [\sin(a+1)u - \sin(a-1)u]/2 \quad (\text{F.18})$$

dont la valeur moyenne est 0. Dans le cas où  $(p+q)$  est pair, le terme additionnel  $\langle \binom{2r}{r} \sin u \rangle_u$  disparaît aussi. De sorte que nous avons finalement, pour  $(p+q)$  quelconque :

$$\langle \cos^{p+q} u \sin u \rangle_u = 0 \quad (\text{F.19})$$

d'où  $S = 0$ . Le résultat final est donc :

$$\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle = \cos \alpha \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} \alpha_p \sum_{\substack{q=\pi_p \\ \text{par } 2}}^{k-2i} \alpha_q (-e)^{p-q+k-2i} \frac{1}{2^{p+q}} \binom{p+q}{\frac{p+q}{2}} \quad (\text{F.20})$$

### F.3 Calcul de $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$ pour le cas $k = 0$

Comme mentionné préalablement, le cas  $k = 0$  doit être considéré séparément puisque les développements (F.6) et (F.14) ne sont plus valables dans ce cas précis. Le calcul est beaucoup plus simple ; on a successivement :

$$\begin{aligned} \langle \xi^{-n} \cos \alpha \rangle &= \cos \alpha \langle \xi^{-n-1} \rangle_u \\ &= \cos \alpha \langle (1 - e \cos u)^{n+1} \rangle_u \\ &= \cos \alpha \left\langle \sum_{i=0}^{n+1} (-e \cos u)^i \binom{n+1}{i} \right\rangle_u \\ &= \cos \alpha \sum_{\substack{i=0 \\ \text{par } 2}}^{n+1} (-e)^i \binom{n+1}{i} \frac{1}{2^i} \binom{i}{\frac{i}{2}} \end{aligned} \quad (\text{F.21})$$

avec la contrainte  $n \geq -1$  afin que le développement soit valable.

### F.4 Quelques expressions explicites de $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$ et validations

Pour être complets, nous avons vérifié les formules analytiques (F.20) et (F.21) avec le logiciel de manipulation symbolique Maple, pour l'intervalle  $k \in [0, 31]$ ,  $n \in [k - 1, 30]$ . Quelques expressions explicites de  $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle / \cos \alpha$  sont données à la Table F.1. Une expression d'un ordre plus élevé est par exemple :

$$\begin{aligned} &\langle \xi^{-30} \cos(27f + \alpha) \rangle \\ &= \cos \alpha \left( -\frac{820383749920273}{4194304} e^{27} - \frac{351593035680117}{16777216} e^{29} - \frac{12123897782073}{67108864} e^{31} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.22})$$

Nous pouvons souligner deux particularités dans l'expression de  $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$ , avec  $k \geq 0$ . Tout d'abord, le signe est  $(-1)^k$ , ce qui est clair quand on considère (F.20) et (F.21). Plus particulièrement, dans (F.20), la parité de l'exposant de  $(-e)$  est  $k$ , car  $p$  et  $q$  sont de même parité et  $2i$  est bien sûr pair. Ensuite, on infère que la plus grande puissance de  $e$  apparaissant dans  $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle$  est  $n + \pi_{n-k}$ , où la parité de  $(n - k)$  vaut  $\pi_{n-k}$ . La preuve formelle de cette assertion semble difficile au vu de (F.20), puisque plusieurs combinaisons d'indices contribuent à une même puissance de  $e$ .

TAB. F.1 – Quelques expressions explicites de  $\langle \xi^{-n} \cos(kf + \alpha) \rangle / \cos \alpha$ 

$k \backslash n$	-1	0	1	2	3	4	5
0	1	1	$1 + \frac{1}{2} e^2$	$1 + \frac{3}{2} e^2$	$1 + 3e^2 + \frac{3}{8} e^4$	$1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4$	$1 + \frac{15}{2} e^2 + \frac{45}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6$
1	/	$-e$	$-\frac{3}{2} e$	$-2e - \frac{1}{2} e^3$	$-\frac{5}{2} e - \frac{15}{8} e^3$	$-3e - \frac{9}{2} e^3 - \frac{3}{8} e^5$	$-\frac{7}{2} e - \frac{35}{4} e^3 - \frac{35}{16} e^5$
2	/	/	$\frac{3}{2} e^2$	$\frac{5}{2} e^2$	$\frac{15}{4} e^2 + \frac{5}{8} e^4$	$\frac{21}{4} e^2 + \frac{21}{8} e^4$	$7e^2 + 7e^4 + \frac{7}{16} e^6$
3	/	/	/	$-\frac{5}{2} e^3$	$-\frac{35}{8} e^3$	$-7e^3 - \frac{7}{8} e^5$	$-\frac{21}{2} e^3 - \frac{63}{16} e^5$
4	/	/	/	/	$\frac{35}{8} e^4$	$\frac{63}{8} e^4$	$\frac{105}{8} e^4 + \frac{21}{16} e^6$
5	/	/	/	/	/	$-\frac{63}{8} e^5$	$-\frac{231}{16} e^5$
6	/	/	/	/	/	/	$\frac{231}{16} e^6$

## F.5 Calcul de $SS = \langle \xi^{-n} \psi \sin kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$

Ce cas est très similaire à celui du §F.2; la seule nouveauté est le facteur  $\psi \equiv (u - l)$ . L'astuce habituelle est de le remplacer par  $e \sin u$  en utilisant l'équation de Kepler (1.11). La formule n'est à nouveau valable que pour  $k \geq 1$ . En faisant le même genre de manipulations qu'au §F.2, on calcule par analogie avec (F.15) :

$$\begin{aligned}
SS &= \langle \xi^{-n} \psi \sin kf \rangle_l \\
&= \langle \xi^{-n-1} (e \sin u) \sin kf \rangle_u \\
&= e\eta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} (-e)^p \alpha_p \sum_{q=0}^{k-2i-1} (-e)^{k-2i-1-q} \beta_q \langle \cos^{p+q} u \sin^2 u \rangle_u \quad (\text{F.23})
\end{aligned}$$

où nous utilisons les mêmes notations  $\alpha_p, \beta_q$  que précédemment. Ensuite on se sert de  $\sin^2 u = (1 - \cos 2u)/2$  :

$$\langle \cos^{p+q} u \sin^2 u \rangle_u = \{ \langle \cos^{p+q} u \rangle_u - \langle \cos^{p+q} u \cos 2u \rangle_u \} / 2 \quad (\text{F.24})$$

Considérons tout d'abord le cas où  $(p+q)$  est pair. Le résultat (F.12) donne directement

$$\langle \cos^{p+q} u \rangle_u = \frac{1}{2^{p+q}} \binom{p+q}{\frac{p+q}{2}} \quad (\text{F.25})$$

tandis que pour l'autre morceau, on doit utiliser (F.16) avec  $(p+q = 2r)$  de façon à développer  $\cos^{p+q} u$  :

$$\begin{aligned}
\langle \cos^{2r} u \cos 2u \rangle_u &= \left\langle \frac{1}{2^{2r}} \left\{ \sum_{j=0}^{r-1} 2 \binom{2r}{j} \cos 2(r-j)u + \binom{2r}{r} \right\} \cos 2u \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2^{2r}} \sum_{j=0}^{r-1} 2 \binom{2r}{j} \cos 2(r-j)u \cos 2u \right\rangle \quad (\text{F.26})
\end{aligned}$$

puisque  $\cos 2u$  est périodique. En considérant

$$\cos 2(r-j)u \cos 2u = [\cos(2(r-j+1)u + \cos 2(r-j-1)u)]/2 \quad (\text{F.27})$$

on en déduit que la seule contribution non nulle est le cas où  $j = r-1$ , de sorte que l'on a :

$$\langle \cos^{2r} u \cos 2u \rangle_u = \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r}{r-1} \quad (\text{F.28})$$

et aussi :

$$\langle \cos^{p+q} u \sin^2 u \rangle_u = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r}{r} - \frac{1}{2^{2r}} \binom{2r}{r-1} \right\} = \frac{(2r)!}{2^{2r+1} r! (r+1)!} \quad (\text{F.29})$$

Considérons ensuite le cas où  $(p+q)$  est impair. Le résultat (F.12) donne directement  $\langle \cos^{p+q} u \rangle_u = 0$ , tandis qu'on doit utiliser (F.17) avec  $(p+q = 2r-1)$  de façon à développer  $\cos^{p+q} u$  :

$$\langle \cos^{2r-1} u \cos 2u \rangle_u = \langle \frac{1}{2^{2r-2}} \sum_{j=0}^{r-1} \binom{2r-1}{j} \cos(2r-2j-1)u \cos 2u \rangle_u = 0 \quad (\text{F.30})$$

puisque

$$\cos(2r-2j-1)u \cos 2u = [\cos(2r-2j+1)u + \cos(2r-2j-3)u]/2 \quad (\text{F.31})$$

est toujours périodique. Le résultat final est donc :

$$SS = e\eta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} \alpha_p \sum_{\substack{q=\pi_p \\ \text{par } 2}}^{k-2i-1} (-e)^{p-q+k-2i-1} \beta_q \frac{(2r)!}{2^{2r+1} r! (r+1)!} \quad (\text{F.32})$$

avec  $p+q = 2r$ , et  $\pi_p$  étant la parité de  $p$ .

## F.6 Calcul de $CC = \langle \xi^{-n} \psi \cos kf \rangle$ pour le cas $k \neq 0$

Ce cas est très similaire à celui du §F.1; la seule nouveauté étant le facteur  $\psi \equiv (u-l)$ . La formule n'est toujours valable que pour  $k \geq 1$ . On calcule par analogie avec (F.11) :

$$\begin{aligned} CC &= \langle \xi^{-n} \psi \cos kf \rangle_l \\ &= \langle \xi^{-n-1} (e \sin u) \cos kf \rangle_u \\ &= e \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} b_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} (-e)^p \alpha_p \sum_{q=0}^{k-2i} (-e)^{k-2i-q} \alpha_q \langle \cos^{p+q} u \sin u \rangle_u \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{F.33})$$

par le résultat précédent (F.19), de sorte que l'on aboutit à :

$$\begin{aligned} &\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle \\ &= SS \cos \alpha \\ &= e\eta \cos \alpha \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} d_i^{(k)} \sum_{p=0}^{n+1-k+2i} \alpha_p \sum_{\substack{q=\pi_p \\ \text{par } 2}}^{k-2i-1} (-e)^{p-q+k-2i-1} \beta_q \frac{(2r)!}{2^{2r+1} r! (r+1)!} \end{aligned} \quad (\text{F.34})$$

avec  $p+q = 2r$ , et où la parité de  $p$  est  $\pi_p$ .

## F.7 Calcul de $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$ pour le cas $k = 0$

On obtient aisément :

$$\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle = CC \sin \alpha = 0 \quad (\text{F.35})$$

par (F.33). Notons que la formule générale (F.34), bien que dérivée pour  $k \geq 1$ , donne également un résultat valable pour le cas  $k = 0$ , puisqu'aucun terme n'est généré dans la sommation en  $q$  (car  $k - 2i - 1 = -1$ ) ; dans ce cas,  $d_i^{(k)} = \binom{-1}{0} = 1$  devrait de préférence être évalué via la fonction  $\Gamma$ .

## F.8 Quelques expressions explicites de $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$ et validations

Pour être complets, nous avons vérifié les formules analytiques (F.34) à l'aide de Maple, pour le même intervalle que précédemment ( $k \in [0, 31], n \in [k - 1, 30]$ ). Quelques expressions explicites de  $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle / (e\eta \cos \alpha)$  sont données à la Table F.2. Une expression d'un ordre plus élevé est par exemple :

$$\begin{aligned} \langle \xi^{-30} \psi \sin(27f + \alpha) \rangle &= e\eta \cos \alpha \\ &\times \left( \frac{22150361247847371}{134217728} e^{26} + \frac{9493011963363159}{536870912} e^{28} + \frac{327345240115971}{2147483648} e^{30} \right) \end{aligned} \quad (\text{F.36})$$

TAB. F.2 – Quelques expressions explicites de  $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle / (e\eta \cos \alpha)$

$k \backslash n$	-1	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	/	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} e^2$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} e^2$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{16} e^4$	$\frac{1}{2} + \frac{5}{4} e^2 + \frac{5}{16} e^4$	$\frac{1}{2} + \frac{15}{8} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{5}{128} e^6$
2	/	/	$-e$	$-\frac{5}{4} e$	$-\frac{3}{2} e - \frac{1}{4} e^3$	$-\frac{7}{4} e - \frac{7}{8} e^3$	$-2e - 2e^3 - \frac{1}{8} e^5$	$-\frac{9}{4} e - \frac{15}{4} e^3 - \frac{45}{64} e^5$
3	/	/	/	$\frac{15}{8} e^2$	$\frac{21}{8} e^2$	$\frac{7}{2} e^2 + \frac{7}{16} e^4$	$\frac{9}{2} e^2 + \frac{27}{16} e^4$	$\frac{45}{8} e^2 + \frac{135}{32} e^4 + \frac{27}{128} e^6$
4	/	/	/	/	$-\frac{7}{2} e^3$	$-\frac{21}{4} e^3$	$-\frac{15}{2} e^3 - \frac{3}{4} e^5$	$-\frac{165}{16} e^3 - \frac{99}{32} e^5$
5	/	/	/	/	/	$\frac{105}{16} e^4$	$\frac{165}{16} e^4$	$\frac{495}{32} e^4 + \frac{165}{128} e^6$
6	/	/	/	/	/	/	$-\frac{99}{8} e^5$	$-\frac{1287}{64} e^5$
7	/	/	/	/	/	/	/	$\frac{3003}{128} e^6$

Nous pouvons souligner deux particularités dans l'expression de  $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$ , avec  $k \geq 1$ . Tout d'abord, le signe est  $(-1)^k$ , ce qui est à nouveau clair quand on

considère (F.34). Ensuite, on infère que la plus grande puissance de  $e$  apparaissant dans  $\langle \xi^{-n} \psi \sin(kf + \alpha) \rangle$  est  $n + \pi_{n-k}$ .

## Annexe G

### Tableau résumé de quelques valeurs moyennes et générateurs

TAB. G.1: Quelques valeurs moyennes  $\bar{\mathcal{H}}$  et générateurs associés  $\mathcal{W}$ .  
Notations :  $\xi = a/r$ ,  $\eta = \sqrt{1-e^2}$ ,  $\phi = (f-l)$ ,  $\psi = (u-l)$ ,  $\beta = (1-\eta)/e = e/(1+\eta)$  ; les anomalies vraies, moyennes et excentriques sont respectivement  $f, l, u$  ; la quantité  $\alpha$  leur est indépendante. Les générateurs  $\mathcal{W}$  sont définis à une constante près (indépendante des anomalies). On a aussi  $k, j, n \in \mathbb{Z}$ .

$\mathcal{H}$	$\bar{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} dl$	$n\mathcal{W} = \int_0^l (\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}) dl$	Référence
$k$	$k$	0	
<b>valeurs particulières en <math>\xi^0</math> (et <math>f, u</math>)</b>			
$\sin f$	0	$-\eta \cos u$	[Kelly, 1989]
$\sin 2f$	0	$2\eta(\eta^2 \ln r + e \cos u)/e^2$	[Kelly, 1989]
$\sin 3f$	0	$-\eta(8\eta^2 \ln r + (3 + \eta^2)e \cos u + 4\eta^2 e \cos f)/e^3$	[Kelly, 1989]
$\cos f$	$-e$	$\eta^2 \sin u$	[Kelly, 1989]
$\cos 2f$	$e^2(1+2\eta)(1+\eta)^{-2}$	$2\eta^2(\eta\phi - 2e \sin u)/e^2$	[Kelly, 1989]
$\cos 3f$	$-e^3(1+3\eta)(1+\eta)^{-3}$	$\eta^2(-8\eta\phi + 3(3+\eta^2)e \sin u + 4\eta e \sin f)/e^3$	[Kelly, 1989]
$\cos u$	$-e/2$	$\bar{\mathcal{H}}\psi + \sin u - (e/4) \sin 2u$	[Kelly, 1989]
$\cos 2u$	0	$-(e/2) \sin u + (1/2) \sin 2u - (e/6) \sin 3u$	[Jefferys, 1971]
<i>suite à la page suivante</i>			



<i>suite de la page précédente</i>			
$\mathcal{H}$	$\bar{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} dl$	$n\mathcal{W} = \int_0^l (\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}) dl$	Référence
$\cos 3u$	0	$-(e/4) \sin 2u$ $+ (1/3) \sin 3u$ $-(e/8) \sin 4u$	[Jefferys, 1971]
$\sin u$	0	$1/(2e\xi^2)$	[Jefferys, 1971]
$\sin 2u$	0	$1/(e^2\xi^2) - 2/(3e^2\xi^3)$	[Jefferys, 1971]
$\sin u \sin f$	$\eta/2$	$\bar{\mathcal{H}}(\psi - (1/2) \sin 2u)$	[Jefferys, 1971]
<b>valeurs particulières en <math>\xi^{&gt;0}</math> (et <math>f</math>)</b>			
$\xi$	1	$\psi$	[Tisserand, 1889]
$\xi^2$	$\eta^{-1}$	$\phi\eta^{-1}$	[Tisserand, 1889]
$\xi^3$	$\eta^{-3}$		[Tisserand, 1889]
$\xi^3 \sin 2f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^3 \cos 2f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^4 \sin f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^4 \cos f$	$e\eta^{-5}$		[Tisserand, 1889]
$\xi^4 \sin 3f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^4 \cos 3f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^5$	$(1 + 3e^2/2)\eta^{-7}$		[Tisserand, 1889]
$\xi^5 \sin 2f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^5 \cos 2f$	$3e^2\eta^{-7}/4$		[Tisserand, 1889]
$\xi^5 \sin 4f$	0		[Tisserand, 1889]
$\xi^5 \cos 4f$	0		[Tisserand, 1889]
<b>valeurs particulières en <math>\xi^{&lt;0}</math></b>			
$\xi^{-1}$	$1 + e^2/2$	$\bar{\mathcal{H}}\psi - 2e \sin u$ $+ (e^2/4) \sin 2u$	[Jefferys, 1971]
$\xi^{-2}$	$1 + (3/2)e^2$	$\bar{\mathcal{H}}\psi - 3e \sin u(1 + e^2/4)$ $+ (3e^2/4) \sin 2u$ $-(e^3/12) \sin 3u$	[Tisserand, 1889, Jefferys, 1971]
<b>valeurs particulières en <math>\phi \neq 0</math></b>			
$\phi \sin f$	$\eta e(1/2 + (1 + \eta)^{-1})$		[Métris, 1991]
<i>suite à la page suivante</i>			

<i>suite de la page précédente</i>			
$\mathcal{H}$	$\bar{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H} \, dl$	$n\mathcal{W} = \int_0^l (\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}) \, dl$	Référence
classes de fonctions			
$\sin kf$	0		[Kelly, 1989]
$\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (kf + \alpha)$	$(-\beta)^k (1 + k\eta) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} \alpha$		[Kelly, 1989]
$\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (ku + \alpha)$ $ k  \neq 1$	0		[Kelly, 1989]
$\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (ku + \alpha)$ $ k  = 1$	$-(e/2) \left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} \alpha$		[Kelly, 1989]
$\cos kf \ (k \geq 0)$	$(-\beta)^k (1 + k\eta)$		[Kozai, 1959]
$\cos ku \ (k > 1)$	0		[Kozai, 1962a]
$\xi^n \cos kf$ $(n-k < 2)$	0		[Kozai, 1962b]
$\phi \cos kf$	0		[Métris, 1991]
$\phi \sin kf$	$S - T$		[Métris, 1991]
$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{H}_{1,n}^{(0)}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \tilde{\mathcal{H}}_{0,n}^{(1)}$	$\mathcal{W}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \mathcal{W}_{1,n}$	zonal complet (Chapitre 6)
$\xi^{-n} \cos(kf + \alpha)$	...		Annexe F
$\psi \xi^{-n} \sin(kf + \alpha)$	...		Annexe F
$P(r, \dot{r}) \times$	...	...	Chapitre 8
$\left\{ \begin{smallmatrix} \cos \\ \sin \end{smallmatrix} \right\} (jf + ku + \alpha)$			[Jefferys, 1971]



## Annexe H

### Description sommaire du programme de moyennisation

TAB. H.1: Liste des sous-routines du programme de moyennisation sur l'anomalie moyenne  $l$  du satellite, et description sommaire.

Nom de la sous-routine	Description sommaire
<b>définition du problème : création des perturbations</b>	
LEGENDRE (A,L,M,XINDEX,SXINDEX) .....	Polynômes de Legendre $P_{nm}$
FormZonal(A,i) .....	Perturbation zonales $J_n \quad \forall n$
FormJ2(A) .....	Perturbation due au $J_2$
FormJ345(A) .....	Perturbation due aux $J_{3-5}$
formC22(A) .....	Perturbation due au $C_{22}$
formGam(A,FlagVeTe) .....	Perturbation due au 3 <sup>e</sup> corps
formnmo(A) .....	Perturbation due à $n_{\mathcal{A}}$
<b>moyennisation : Triangle de Lie</b>	
Start .....	Définition des (27) variables
formtable .....	Dérivées partielles $\partial \Xi / \partial \Lambda$ (T5.1)
Poisson(A,B,C) .....	Parentèse de Poisson
derivl(A,B) .....	Dérivée partielle $\partial \bullet / \partial l$
derivg(A,B) .....	Dérivée partielle $\partial \bullet / \partial g$
derivh(A,B) .....	Dérivée partielle $\partial \bullet / \partial h$
derivL(A,B) .....	Dérivée partielle $\partial \bullet / \partial L$
derivG(A,B) .....	Dérivée partielle $\partial \bullet / \partial G$
derivH(A,B) .....	Dérivée partielle $\partial \bullet / \partial H$
PoissonOmega(B,C) .....	Parentèse de Poisson pour $\omega_i p_i$
PoissonNew(A,B,C,EPSIL) .....	Parentèse de Poisson à $\epsilon$ près
<b>intégration</b>	
integMaple(A,B,C) .....	Voir Table 11.1
integ(A,B,C) .....	Voir Table 11.1
integfml(A,B,C) .....	Voir Table 11.1
integu(A,B,C) .....	Voir Table 11.1
integu0(A,B,C) .....	Voir Table 11.1

*suite à la page suivante*

<i>suite de la page précédente</i>	
Nom de la sous-routine	Description sommaire
<code>integu2(A,B,C)</code> .....	Voir Table 11.1
<code>integJef(A,B,C)</code> .....	Voir Table 11.1
<code>integfmlAlone03(A,B,C)</code> .....	Voir Table 11.1
<code>integfmlAlone040ld(A,B,C)</code> .....	Voir Table 11.1
<code>integfmlAlone04(A,B,C)</code> .....	Voir Table 11.1
<b>manipulations</b>	
<code>ExpandTrig(SinCos,k,IndC,IndS,A)</code> .....	$\{\frac{\cos}{\sin}\}(kx) \rightarrow \{\frac{\cos^n}{\sin^n}\}x$
<code>ExpandTrigSerie(A,IArg,SerCosArg,SerSinArg)</code> .....	$\sum \{\frac{\cos}{\sin}\}(k\{f_u\}) \rightarrow \sum \{\frac{\cos^n}{\sin^n}\}\{f_u\}$
<code>simplify(A)</code> .....	$(\eta^{\geq 2}, s^{\geq 2}, c_+, c_-) \rightarrow (e, c)$
<code>ReduceNew(A)</code> .....	<b>reduce</b> (35 × plus rapide)
<code>reduce(A)</code> .....	<b>simplify</b> + $\sum$ <b>CollectAllNew</b>
<code>ExpandXiF(A)</code> .....	$\xi^{n \geq 0} \rightarrow \sum \{\frac{\cos}{\sin}\}kf$
<code>ExpandXiU(A)</code> .....	$\xi^{n < 0} \rightarrow \sum \{\frac{\cos}{\sin}\}ku$
<code>SUBSTITUTERECURSIVE (A,B,I,K)</code> .....	<b>SUBSTITUTE</b> (20 × plus rapide)
<code>SUBSTITUTE (A,B,I,K)</code> .....	(Variable I) <sup>n</sup> → (série I) <sup>n</sup>
<code>collect(A,angles,sincos,IndexVar1,IndexVar2)</code> ....	$(\eta^{\geq 2}, s^{\geq 2}, c_+, c_-) \leftarrow (e, c)$ à $\epsilon$ près
<code>CollectAll(A,IndexVar1,IndexVar2)</code> .....	$\sum_{Série} \text{collect} \forall$ type trigono
<code>Clean(A,eps)</code> .....	Arrondit les coefficients
<code>CleanMantisse(A,NbreChiffres)</code> .....	Nettoie la mantisse
<code>CollectAllNew(A,IndexVar1,IndexVar2,TypeCollect)</code>	<b>CollectAll</b> plus efficace
<code>CollectNew(A,IndexVar1,IndexVar2,TypeCollect)</code> ...	<b>CollectAll</b> pour 1! type trigono
<code>CollectBeta(A)</code> .....	$(\eta^n, e^k) \rightarrow (\beta^i, \beta^{-j})$ à $\epsilon$ près
<code>SUBSTITUTENEW (A,B,I,K)</code> .....	meilleur <b>SUBSTITUTE(+RECURSIVE)</b>
<code>Collect1pmc(A)</code> .....	$(c_+, c_-) \leftarrow (e, c)$ à $\epsilon$ près
<code>ORDER_SIZE(A)</code> .....	Trie la série par coefficients
<code>ORDER_CODE(A)</code> .....	Trie la série par type trigono
<code>PRODUCTNEW (A,B,C,ALPHA,EPSIL)</code> .....	Produit accéléré de séries à $\epsilon$ près
<b>équations du mouvement et Transformées de Lie</b>	
<code>EquaMotion(H,OrderMax,Averaged)</code> .....	$\mathcal{H} \leftarrow \{\dot{p}_i, \dot{q}_i\}$
<code>LieTransfIC(W,Order,Direct,ICAver,ICOscu)</code> .....	$\mathcal{L}(a, e, i, l, g, h)$
<code>LieTransform(A,W,Order,ARG,EXP,Direct,Value)</code> ....	$\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}^{-1}$
<b>I/O</b>	
<code>MinMax(A,IndexVar,ArgExpType,MINNI,MAXXI)</code> .....	Valeurs extrêmes des exposants
<code>printit(series,title)</code> .....	Série au format MM
<code>printitMaple(series,title,ix,iy)</code> .....	Série au format Maple
<code>printitBySize(series,title)</code> .....	Série triée par coefficient
<code>PrintHWH(A,B,C)</code> .....	Nombre de termes dans $\mathcal{H}, \mathcal{W}, \bar{\mathcal{H}}$
<code>HistoNBTERM(A,title)</code> .....	Histogramme des coefficients
<code>PrintNumberTermsHW(series,W,ordre)</code> .....	Nombre de termes dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{W}$
<code>PrintNumberTermsH(series,ordre)</code> .....	Nombre de termes du triangle
<code>PRINTSTAT (IO,A,LABEL,I)</code> .....	<b>MinMax</b> dans un fichier
<code>PRINTSORTED (IO,A,LABEL,I,ISORT,TPFLAG)</code> .....	Série triée par la variable No I
<code>PrintTypeAnomaly(A)</code> .....	Liste $\forall$ type trigono
<i>suite à la page suivante</i>	

---

*suite de la page précédente*


---

Nom de la sous-routine	Description sommaire
<code>PrintByPert(IO,A,title,LaTeX,Suppress,NDigit) ...</code>	Série au format $\text{\LaTeX}$
<code>PrintNBTERM(A,title) .....</code>	Nombre de termes de la Série
<code>printitBySize24(series,title) .....</code>	Série triée par coefficient $\rightarrow$ fichier
<code>PrintBySizeTeX(IO,A,title,LaTeX,Suppress,NDigit)</code>	<code>printitBySize24</code> au format $\text{\LaTeX}$
<code>GiveStat(A,TABARGX,TABEXPX) .....</code>	PRINTSTAT en variables
<b>Divers - utilitaires</b>	
<code>EraseArgExpSC (SCFLAG,TABARG,TABEXP) .....</code>	Réinitialise les 27 variables
<code>ChangeNomVar(IndexVar,ArgExpType,NewName) .....</code>	Renomme la variable No <code>IndexVar</code>
<code>EVALALL(A,VALARG,VALEXP) .....</code>	Evalue la Série en les 27 variables
<code>ErrorStop .....</code>	Arrête l'exécution du programme
<code>ErrorLabelStop(IndexVar,ArgExpType,CheckName) ...</code>	Vérifie la cohérence des variables

---



# Annexe I

## Extension du manipulateur symbolique MM : gestion de fractions

Nous avons étendu l'outil MM à la gestion de fractions symboliques pour les coefficients, en complément de la double précision habituelle : les deux formes sont calculées et présentées simultanément.

Cette nécessité s'est fait sentir quand nous avons voulu calculer la moyennisation du zonal  $J_{12}$  (voir Chapitre 6). Le coefficient numérique d'un des termes était

$$\frac{22!}{11!} \frac{11}{10!} 2^{31}$$

forme fractionnelle fermée que nous avons perdue via la double précision numérique.

### I.1 Description sommaire

Nous avons dès lors développé un package de gestion de fractions symboliques, qui comprend les opérations habituelles  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ , ainsi que diverses conversions. Les sous-routines sont les suivantes :

Opérations :

```
MULT1COEFF(TABCOEFF,NUM,DENO)
SUBTR2COEFF(TABCOEFF1,TABCOEFF2)
ADD2COEFF(TABCOEFF1,TABCOEFF2)
DIV2COEFF(TABCOEFF1,TABCOEFF2)
MULT2COEFF(TABCOEFF1,TABCOEFF2)
DIVIDE2BIN(N,SN,P,SP,Q,SQ)
READPRIMES()
REDUCE2DEC(TABDEC1,ST1,TABDEC2,ST2)
```

Conversions :

```
BIN2DEC(TABBIN,SIZEBIN,TABDEC,ST)
DEC2BIN(TABDEC,ST,TABBIN,SIZEBIN)
```



```

INT2BIN(DEC,TABBIN,SIZEBIN)
MULT2DEC(TABDEC1,ST1,TABDEC2,ST2)
MULT1DEC1FIG(TABDEC1,ST1,FIGURE)
MULT1DEC1INT(TABDEC1,ST1,DEC)
SUBTR2DEC(TABDEC1,ST1,TABDEC2,ST2,SIGN)
ADD2DEC(TABDEC1,ST1,TABDEC2,ST2)
DEC2COEFF(TABCOEFF,TABDEC1,ST1,TABDEC2,ST2,SIGN)
COPY1COEFF(TABCOEFF1,TABCOEFF2)
COEFF2DEC(TABCOEFF,TABDEC1,ST1,TABDEC2,ST2,SIGN)
INT2COEFF(NUM,DENO,TABCOEFF)
PRINT1DEC(TABDEC,ST)
PRINT1BIN(TABBIN,SIZEBIN)
PRINT1COEFF(TABCOEFF)
NUM2STR(TABNUM,SIZENUM,TABCHAR)

```

Par souci de rapidité, nous effectuons les divisions en binaire et des routines de conversion de bases (décimal  $\leftrightarrow$  binaire) sont donc nécessaires. Une fraction est représentée par un numérateur et un dénominateur qui peuvent chacun comporter jusqu'à 54 chiffres (et même plus : c'est paramétrable).

La simple addition de fractions suppose une phase de simplification, où l'on a besoin de reconnaître les facteurs communs. Afin de simplifier les fractions, nous avons dû générer des fichiers de nombres premiers, typiquement les 100 premiers sont fort utiles.

Nous nous sommes donc aussi intéressés aux tests de primalité, notamment la méthode polynomiale simple AKS [Agrawal et al., 2002] dont nous avons postposé l'implémentation dans le package en attendant que sa nécessité se fasse davantage sentir. La période a été faste pour la théorie des nombres : nous avons aussi eu droit à la preuve du dernier théorème de Fermat par [Wiles, 1995]. La recherche à venir promet encore de belles surprises telle l'énigme de la conjecture de Riemann [Devlin, 2005].

## I.2 Validation extensive

Nous avons validé toutes les routines, par comparaison avec le logiciel symbolique Maple.

La routine de division — de loin la plus délicate — nécessitait une attention plus particulière. Elle doit donner le quotient  $Q$  et le reste  $R$ , pour la division par  $F$  d'un grand nombre  $P$  avec  $Q, R, F, P \in \mathbb{N}$  :

$$P = Q \times F + R$$

Afin de la tester, nous l'avons appliquée à des exemples de plus en plus gros, jusqu'à aboutir à la factorisation de nombres de Fermat :

$$F_i = 2^{2^i} + 1$$

Nous avons vérifié complètement la factorisation des premiers nombres de Fer-

mat, et avons terminé par un assez gros calcul, où nous avons trouvé que le facteur

$$13\,631\,489$$

divisait le nombre de Fermat  $F_{18}$ , qui comporte déjà quelques 78 714 chiffres (soit environ 20 pages de  $80 \times 50$  chiffres!) — et plus de 3 fois plus en binaire! Le calcul de la recherche de facteurs a mis quelques 16 jours de CPU, mais la routine a fonctionné!

### I.3 Un exemple de calcul

Dans l'exemple ci-dessous, nous avons calculé la quantité :

$$\text{temp2} * \frac{-5}{17} \left( \text{temp1} \frac{19}{41} \right)^{10}$$

où **temp1** et **temp2** sont des séries à deux termes données ci-après. Les fractions correspondantes aux coefficients en double précision sont imprimées à chaque fois à la ligne suivante.

Par exemple, le premier des 72 coefficients de la série Résultat est :

$$-0.4324209678091463D - 08$$

qui provient en fait de la fraction :

$$-\frac{474690988289860948954128692835}{109775201395731485477680149804219367424}.$$

```

SERIE      temp1      0
NUMBER OF TERMS :      2

      f   g   h      xi   a      COEF
cos(  0   1   0 ) (  1   0 )  0.2307692307692310D+00
+ 3 / 13
sin(  1   0   0 ) (  1   0 ) -0.2500000000000000D+00
- 1 / 4

```

```

SERIE      temp2      0
NUMBER OF TERMS :      2

      f   g   h      xi   a      COEF
cos(  0   1   0 ) (  1   0 ) -0.6787330316742082D-01
- 15 / 221
sin(  1   0   0 ) (  1   0 )  0.7352941176470590D-01
+ 5 / 68

```

```

SERIE      Résultat      0
NUMBER OF TERMS :      72

      f   g   h      xi   a      COEF
cos(  0   1   0 ) ( 11   0 ) -0.4324209678091463D-08
- 474690988289860948954128692835 / 109775201395731485477680149804219367424
cos(  0   3   0 ) ( 11   0 ) -0.2140231983555330D-08
- 29368049628546429417072212625 / 13721900174466435684710018725527420928
cos(  0   5   0 ) ( 11   0 ) -0.5036684195803270D-09
- 6352286557456347903289125 / 12612040601531650445505531916845056
cos(  0   7   0 ) ( 11   0 ) -0.5114678357103702D-10
- 1370763785950798528661625 / 26800586278254757196699255323295744
cos(  0   9   0 ) ( 11   0 ) -0.1816791208217540D-11
- 6086383690676103381105 / 3350073284781844649587406915411968
cos(  0  11   0 ) ( 11   0 ) -0.1296807445143880D-13
- 5430499971853368735 / 418759160597730581198425864426496
sin(  1   0   0 ) ( 11   0 )  0.4355834814534994D-08
+ 294253934776687487094152482515 / 67553970089680914140110861417981149184
sin(  1   2   0 ) ( 11   0 )  0.3064349771801560D-08
+ 12938062051787657350555021725 / 4222123130605057133756928838623821824
sin(  1   4   0 ) ( 11   0 )  0.1045749364056620D-08
+ 275955161174936385435178875 / 263882695662816070859808052413988864
sin(  1   6   0 ) ( 11   0 )  0.1616437240925610D-09
+ 1332968176578794372805375 / 8246334239463002214369001637937152
sin(  1   8   0 ) ( 11   0 )  0.9706806353065230D-11
+ 20011392396279663788475 / 2061583559865750553592250409484288
sin(  1  10   0 ) ( 11   0 )  0.1545362205463121D-12
+ 19911833230129018695 / 128848972491609409599515650592768
sin(  1  -2   0 ) ( 11   0 )  0.3064349771801560D-08
+ 12938062051787657350555021725 / 4222123130605057133756928838623821824
sin(  1  -4   0 ) ( 11   0 )  0.1045749364056620D-08
+ 275955161174936385435178875 / 263882695662816070859808052413988864
sin(  1  -6   0 ) ( 11   0 )  0.1616437240925610D-09
+ 1332968176578794372805375 / 8246334239463002214369001637937152

```

```

sin( 1 -8 0 ) ( 11 0 ) 0.9706806353065230D-11
+ 20011392396279663788475 / 2061583559865750553592250409484288
sin( 1 -10 0 ) ( 11 0 ) 0.1545362205463121D-12
+ 19911833230129018695 / 128848972491609409599515650592768
cos( 2 1 0 ) ( 11 0 ) 0.3132069638645210D-08
+ 4068918051689153783742254325 / 1299114809416940656540593488807329792
cos( 2 3 0 ) ( 11 0 ) 0.1519124165787653D-08
+ 30836198454967092061361025 / 20298668897139697758446773262614528
cos( 2 5 0 ) ( 11 0 ) 0.3404489168177310D-09
+ 1727664959718240698937375 / 5074667224284924439611693315653632
cos( 2 7 0 ) ( 11 0 ) 0.3111114606692770D-10
+ 2466854894621539538325 / 79291675379451944368932708057088
cos( 2 9 0 ) ( 11 0 ) 0.8370711946258570D-12
+ 33186388716881697825 / 39645837689725972184466354028544
cos( 2 -1 0 ) ( 11 0 ) 0.3132069638645210D-08
+ 4068918051689153783742254325 / 1299114809416940656540593488807329792
cos( 2 -3 0 ) ( 11 0 ) 0.1519124165787653D-08
+ 30836198454967092061361025 / 20298668897139697758446773262614528
cos( 2 -5 0 ) ( 11 0 ) 0.3404489168177310D-09
+ 1727664959718240698937375 / 5074667224284924439611693315653632
cos( 2 -7 0 ) ( 11 0 ) 0.3111114606692770D-10
+ 2466854894621539538325 / 79291675379451944368932708057088
cos( 2 -9 0 ) ( 11 0 ) 0.8370711946258570D-12
+ 33186388716881697825 / 39645837689725972184466354028544
sin( 3 0 0 ) ( 11 0 ) -0.2285270237552632D-08
- 913485664345966755901526625 / 399727633666750971243259535017639936
sin( 3 2 0 ) ( 11 0 ) -0.1575477027625350D-08
- 19680053254656442825767975 / 12491488552085967851351860469301248
sin( 3 4 0 ) ( 11 0 ) -0.5017454029935800D-09
- 783443369694506567109525 / 1561436069010745981418982558662656
sin( 3 6 0 ) ( 11 0 ) -0.6646287155385232D-10
- 6486095305888322941575 / 97589754313171623838686409916416
sin( 3 8 0 ) ( 11 0 ) -0.2720481382534034D-11
- 33186388716881697825 / 12198719289146452979835801239552
sin( 3 -2 0 ) ( 11 0 ) -0.1575477027625350D-08
- 19680053254656442825767975 / 12491488552085967851351860469301248
sin( 3 -4 0 ) ( 11 0 ) -0.5017454029935800D-09
- 783443369694506567109525 / 1561436069010745981418982558662656
sin( 3 -6 0 ) ( 11 0 ) -0.6646287155385232D-10
- 6486095305888322941575 / 97589754313171623838686409916416
sin( 3 -8 0 ) ( 11 0 ) -0.2720481382534034D-11
- 33186388716881697825 / 12198719289146452979835801239552
cos( 4 1 0 ) ( 11 0 ) -0.1166488441923500D-08
- 2241719541296610228475875 / 1921767469551687361746440072200192
cos( 4 3 0 ) ( 11 0 ) -0.5279872815121750D-09
- 126833597743390610982525 / 240220933693960920218305009025024
cos( 4 5 0 ) ( 11 0 ) -0.9936936094342030D-10
- 87759561273531600915 / 883165197404268089037886062592
cos( 4 7 0 ) ( 11 0 ) -0.5894376328823741D-11
- 11062129572293899275 / 1876726044484069689205507883008
cos( 4 -1 0 ) ( 11 0 ) -0.1166488441923500D-08
- 2241719541296610228475875 / 1921767469551687361746440072200192
cos( 4 -3 0 ) ( 11 0 ) -0.5279872815121750D-09
- 126833597743390610982525 / 240220933693960920218305009025024
cos( 4 -5 0 ) ( 11 0 ) -0.9936936094342030D-10
- 87759561273531600915 / 883165197404268089037886062592
cos( 4 -7 0 ) ( 11 0 ) -0.5894376328823741D-11
- 11062129572293899275 / 1876726044484069689205507883008
sin( 5 0 0 ) ( 11 0 ) 0.6042558378885480D-09
+ 2858434984716080426237625 / 4730504540434922736606621716185088

```

```

sin( 5 2 0 ) ( 11 0 ) 0.3967056545582880D-09
+ 29322154689127921528875 / 73914133444295667759478464315392
sin( 5 4 0 ) ( 11 0 ) 0.1060980916993450D-09
+ 980268563506310496495 / 9239266680536958469934808039424
sin( 5 6 0 ) ( 11 0 ) 0.8939804098716010D-11
+ 5162327133737152995 / 577454167533559904370925502464
sin( 5 -2 0 ) ( 11 0 ) 0.3967056545582880D-09
+ 29322154689127921528875 / 73914133444295667759478464315392
sin( 5 -4 0 ) ( 11 0 ) 0.1060980916993450D-09
+ 980268563506310496495 / 9239266680536958469934808039424
sin( 5 -6 0 ) ( 11 0 ) 0.8939804098716010D-11
+ 5162327133737152995 / 577454167533559904370925502464
cos( 6 1 0 ) ( 11 0 ) 0.2085645188607613D-09
+ 18973373143162604153625 / 90971241162210052627050417618944
cos( 6 3 0 ) ( 11 0 ) 0.8089872326764670D-10
+ 57495759875749772775 / 710712821579766036148831387648
cos( 6 5 0 ) ( 11 0 ) 0.9684787773609010D-11
+ 1720775711245717665 / 177678205394941509037207846912
cos( 6 -1 0 ) ( 11 0 ) 0.2085645188607613D-09
+ 18973373143162604153625 / 90971241162210052627050417618944
cos( 6 -3 0 ) ( 11 0 ) 0.8089872326764670D-10
+ 57495759875749772775 / 710712821579766036148831387648
cos( 6 -5 0 ) ( 11 0 ) 0.9684787773609010D-11
+ 1720775711245717665 / 177678205394941509037207846912
sin( 7 0 0 ) ( 11 0 ) -0.7307121640750892D-10
- 2045347461484162578875 / 27991151126833862346784743882752
sin( 7 2 0 ) ( 11 0 ) -0.4316960522350890D-10
- 75522933993562053075 / 1749446945427116396674046492672
sin( 7 4 0 ) ( 11 0 ) -0.7494181015292683D-11
- 409708502677551825 / 54670217044597387396063952896
sin( 7 -2 0 ) ( 11 0 ) -0.4316960522350890D-10
- 75522933993562053075 / 1749446945427116396674046492672
sin( 7 -4 0 ) ( 11 0 ) -0.7494181015292683D-11
- 409708502677551825 / 54670217044597387396063952896
cos( 8 1 0 ) ( 11 0 ) -0.1535410813337650D-10
- 4132491934414319025 / 269145683911864061026776383488
cos( 8 3 0 ) ( 11 0 ) -0.4059348049950203D-11
- 136569500892517275 / 33643210488983007628347047936
cos( 8 -1 0 ) ( 11 0 ) -0.1535410813337650D-10
- 4132491934414319025 / 269145683911864061026776383488
cos( 8 -3 0 ) ( 11 0 ) -0.4059348049950203D-11
- 136569500892517275 / 33643210488983007628347047936
sin( 9 0 0 ) ( 11 0 ) 0.3275824967623781D-11
+ 542568708484099495 / 165628113176531729862631620608
sin( 9 2 0 ) ( 11 0 ) 0.1465875684704240D-11
+ 15174388988057475 / 10351757073533233116414476288
sin( 9 -2 0 ) ( 11 0 ) 0.1465875684704240D-11
+ 15174388988057475 / 10351757073533233116414476288
cos( 10 1 0 ) ( 11 0 ) 0.3176063983525853D-12
+ 1011625932537165 / 3185156022625610189665992704
cos( 10 -1 0 ) ( 11 0 ) 0.3176063983525853D-12
+ 1011625932537165 / 3185156022625610189665992704
sin( 11 0 0 ) ( 11 0 ) -0.3127941801957280D-13
- 30655331289005 / 980048006961726212204920832

```

## Annexe J

### Orbites de satellites lunaires réels

Dans cette partie, nous nous intéressons aux données de satellites lunaires réels ayant été (ou étant toujours) en orbite autour de la Lune. Ces données s'avèreront en effet utiles dans un futur proche, afin de pouvoir effectuer des comparaisons avec notre théorie analytique.

Nous avons d'abord recherché où et comment on pouvait obtenir de telles données, et de quels satellites. Le point de départ est la Table 1.3 qui reprend les principaux satellites lunaires et leur orbite caractéristique : la série Apollo, puis CLEMENTINE, LUNAR PROSPECTOR, et enfin SMART-1.

Il est apparu assez rapidement que c'était l'outil SPICE (Spacecraft Planet Instrument C-matrix Events) du NAIF (Navigation and Ancillary Information Facility) qui convenait afin d'obtenir et de manipuler des données de satellites artificiels réels. SPICE est un système d'information pour missions spatiales très fiable et largement utilisé par nombre d'agences spatiales. C'est un outil qui a été développé par le JPL (Jet Propulsion Laboratory), Caltech (California Institute of Technology), via un contrat avec la NASA (National Aeronautics and Space Administration). SPICE est un programme cinématique qui permet entre autres de fournir, à partir d'une date, les positions, vitesses, orientation de tout satellite ou sonde envoyé dans le système solaire. Les données fournies par SPICE sont les orbites "reconstruites" après-coup (un mois de délai) : on peut donc considérer que SPICE fournit l'orbite réelle du satellite. Il faut toujours veiller à prendre la dernière reconstruction en date car il peut y avoir plusieurs remises à jour. Par contre si la date est postérieure, il s'agit bien entendu d'orbites prédites, qui seront ensuite reconstruites.

On peut trouver le "SPICE Toolkit" à l'adresse <http://naif.jpl.nasa.gov/naif>, ainsi que les données sur les différentes missions. SPICE travaille sur base de nombreux fichiers ("SPICE kernels") de différents types, les plus importants étant bien entendu les fichiers d'orbites (fichiers spk). Nous avons repris à la Figure J.1 les données que l'on peut trouver concernant les satellites lunaires de la NASA (source : [http://naif.jpl.nasa.gov/naif/data\\_lunar.html](http://naif.jpl.nasa.gov/naif/data_lunar.html)).

Les données Apollo(-15) sont pour ainsi dire inutilisables car elles recouvrent moins d'un jour (30/07/71-01/08/71). Les données de CLEMENTINE ( $e \approx 0.36$ ) sont déjà plus fournies, mais il n'y a environ que 70 jours de données, qui plus est avec des manoeuvres toutes les 3 semaines environ, ce qui les rend peu utilisables en pratique.

Mission	ck	ek	fk	ik	lsk	mk	pck	sclk	spk
CLEMENTINE*	3*		1	7	2		2	1	4
LUNAR PROSPECTOR*									4
APOLLO*									1

**FIG. J.1** – Les SPICE kernels disponibles pour les satellites lunaires de la NASA (ck=attitude, ek=event, fk=frame, ik=instruments, lsk=leap sec, mk=mission, pck=planetary constants, sclk=spacecraft clock, spk=ephemerides).

Notre théorie étant conservative (pas d'effets dissipatifs), nous sommes en effet intéressés a priori par des satellites qui effectuent peu de manoeuvres et qui sont en orbite suffisamment longtemps. Par ailleurs, une des particularités de notre thèse étant que la théorie analytique est valable pour de hautes excentricités, il serait judicieux de travailler dans ce type de région. Le meilleur satellite aux fins de comparaison serait donc celui qui :

- aurait le plus long laps de temps d'évolution en orbite sans aucune manoeuvre,
- aurait une excentricité non nulle.

Les données de LUNAR PROSPECTOR ( $e \approx 0$ ) vérifient la première condition, mais pas la seconde, car l'excentricité est nulle.

Un satellite s'impose dès lors tout naturellement : c'est SMART-1 ( $e \approx 0.35$ ) de l'ESA qui est actuellement en orbite autour de la Lune, et a une excentricité de l'ordre de 0.35. Les Figures J.2 et J.3 donnent une idée de la mission ; la phase critique étant bien entendu la capture par la Lune, le 11 novembre 2004, tandis que le satellite se trouvait dans la zone WSB "Weak Stability Boundary" (voir Chapitre 2.2).

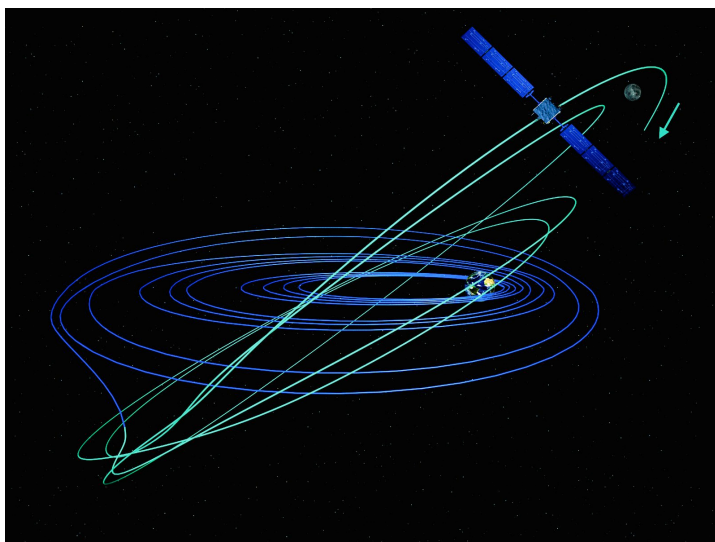
SMART-1 est une mission de démonstration technologique : la propulsion ionique (Xénon), qui donne une poussée faible et continue<sup>1</sup>, a été testée avec succès. SMART-1 présente l'intérêt d'avoir de plus longues périodes sans manoeuvres ; nous avons repris à la Table J.1 les dates-repères de la mission.

La durée de la mission nominale a été d'environ 5 mois, mais la mission a ensuite été étendue à partir du 30/09/05, ce qui devrait ouvrir des perspectives intéressantes d'exploitation.

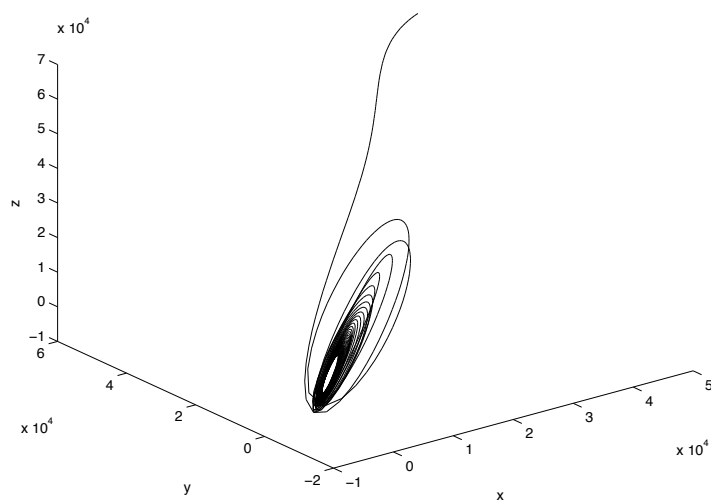
Date	Événement
27/09/03	lancement
11/11/04	première orbite lunaire (début)
27/02/05	orbite lunaire finale - arrêt du moteur - début de la mission nominale
02/08/05	fin de la mission nominale - redémarrage du moteur ionique
30/09/05	fin de la propulsion (carburant épuisé) - début de la mission étendue
01/06/06	SMART-1 est toujours en orbite autour de la Lune

**TAB. J.1** – Quelques dates-repères de la mission SMART-1 (ESA) vers la Lune.

<sup>1</sup>L'accélération est de l'ordre de  $0.2 \text{ mm/s}^2$ , ce qui fait que SMART-1 a atteint la Lune en 13 mois au lieu de 25 jours pour CLEMENTINE par exemple.



**FIG. J.2** – La mission SMART-1 vers la Lune, jusqu'à la capture lunaire (vue d'artiste).

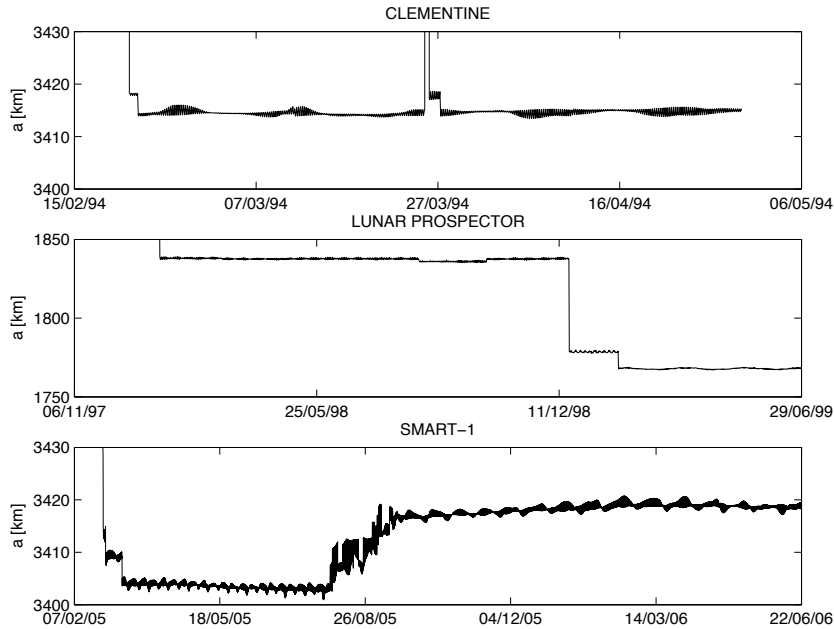


**FIG. J.3** – La mission SMART-1 vers la Lune, à partir de la capture lunaire (orbite réelle), le 11/11/04, et durant 2 mois lunaires.



Les "SPICE kernels" de SMART-1 ont toutefois été très difficiles à trouver, mais nous y sommes parvenus finalement, entre autre suite à différents contacts établis lors de congrès : on peut les trouver à l'adresse <ftp://gorilla.estec.esa.int/pub/projects/Smart-1/data/spice/kernels/>

Une fois les données SPICE concernant les satellites lunaires NASA+ESA récoltées, nous avons ensuite appris à manipuler le logiciel SPICE. En résumé, nous reprenons à la Figure J.4 l'évolution du demi-grand axe  $a$  des 3 satellites lunaires les plus intéressants. Cela donne une idée des orbites nominales et des manoeuvres puisque l'énergie est reliée à  $a$ . On y voit aussi les périodes de mission nominale et l'altitude associée (par exemple LUNAR PROSPECTOR 01/98-07/99 :  $h = 100$  km puis 43.5 km et même 32.5 km).



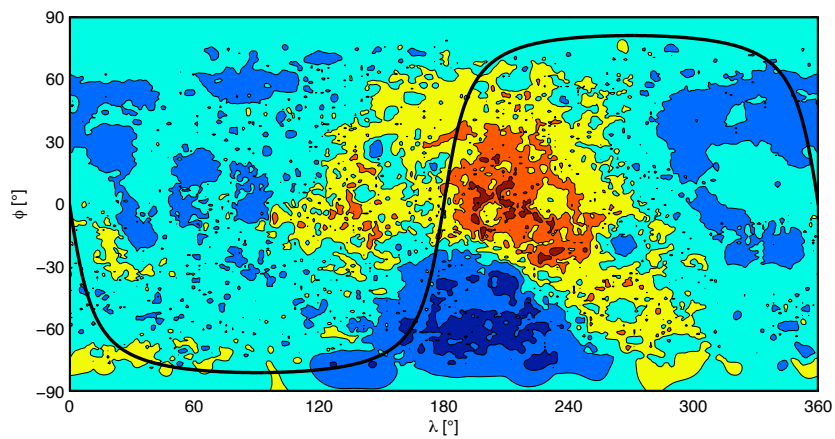
**FIG. J.4** – Evolution du demi-grand axe  $a$  des 3 satellites lunaires les plus intéressants.

Nous nous sommes en outre intéressés à la question de savoir quelle zone du sol lunaire SMART-1 survolait. Un peu de géométrie élémentaire a rapidement donné la formule suivante :

$$\tan \phi \tan i = -\sin \lambda \quad (\text{J.1})$$

qui donne la relation  $\phi(\lambda)$  du tracé de l'orbite au sol en fonction de l'inclinaison  $i$  du satellite. Nous reprenons à la Figure J.5 la trace d'une des orbites de SMART-1 sur le sol lunaire.

En conclusion, c'est le satellite SMART-1 qui semble le plus adapté pour une comparaison éventuelle avec notre théorie analytique, en particulier la phase de la mission nominale (du 27/02/05 au 02/08/05) et celle de la mission étendue (du 30/09/05 au 01/06/06 minimum), qui ne comportent aucune manoeuvre. Son excentricité ( $e \approx 0.35$ ) en fait un candidat tout désigné pour tester notre théorie non



**FIG. J.5** – Tracé sur le sol lunaire d'une orbite du satellite SMART-1 (inclinaison  $i = 81.08^\circ$ ). La topographie est en toile de fond (voir Figure 1.13).

développée en excentricité.



# Bibliographie

- [Agrawal et al., 2002] Agrawal, M., Kayal, N., and Saxena, N. (2002). Primes is in p.
- [Akim and Vlasova, 1983] Akim, E. L. and Vlasova, Z. P. (1983). Investigation of the lunar gravitational field according to measurements of the trajectories of Soviet artificial lunar satellites. *Kosmicheskie Issledovaniia (Russian)*, 21 :499–511.
- [Aksnes, 1971] Aksnes, K. (1971). A Note on "the Main Problem of Satellite Theory for Small Eccentricities, by A. Deprit and A. Rom, 1970". *Celest. Mech.*, 4 :119–121.
- [Ananda, 1977] Ananda, M. P. (1977). Lunar gravity - A mass point model. *J. Geophys. Res.*, 82 :3049–3064.
- [Ash, 1976] Ash, M. E. (1976). Doubly averaged effect of the moon and sun on a high altitude earth satellite orbit. *Celestial Mechanics*, 14 :209–238.
- [Balmino, 1974] Balmino, G. (1974). The Geopotential Representation by Point Masses. In Veis, G., editor, *The Use of Artificial Satellites for Geodesy and Geodynamics*, pages 335–+.
- [Battin, 1987] Battin, R. H. (1987). An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics. Technical report.
- [Bills and Ferrari, 1980] Bills, B. and Ferrari, A. (1980). A Harmonic Analysis of Lunar Gravity. *J. Geophys. Res.*, 85 :1013–1025.
- [Bills, 1979] Bills, B. G. (1979). Planetary Isostasy : Topographic and Gravitational Variance Spectra for the Moon, Mars, Venus and Earth. In *Lunar and Planetary Institute Conference Abstracts*, pages 119–121.
- [Bills and Ferrari, 1977] Bills, B. G. and Ferrari, A. J. (1977). A harmonic analysis of lunar topography. *Icarus*, 31 :244–259.
- [Binder, 1998] Binder, A. B. (1998). Lunar Prospector : Overview. *Science*, 281 :1475–+.
- [Boccaletti and Pucacco, 1999] Boccaletti, D. and Pucacco, G. (1999). *Theory of Orbits, 2 : Perturbative and Geometrical Methods*. Springer-Verlag.
- [Brouwer, 1959] Brouwer, D. (1959). Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *AJ*, 64 :378–397.
- [Brouwer and Clemence, 1961] Brouwer, D. and Clemence, G. (1961). *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press.
- [Burkardt and Danby, 1983] Burkardt, T. M. and Danby, J. M. A. (1983). The solutions of Kepler’s equation. II. *Celestial Mechanics*, 31 :317–328.
- [Capderou, 2002] Capderou, M. (2002). *Satellites, Orbites et missions*. Springer.
- [Chambodut et al., 2005] Chambodut, A., Panet, I., Manda, M., Diamant, M., Holschneider, M., and Jamet, O. (2005). Wavelet frames : an alternative to spherical harmonic representation of potential fields. *Geophysical Journal International*, 163 :875–899.
- [Chapront-Touzé and Chapront, 1991] Chapront-Touzé, M. and Chapront, J. (1991). *Lunar Tables and Programs 4000 BC to AD 8000*. Willmann-Bell.

- [CNES, 1998] CNES (1998). *Cours de Technologies Spatiales : Techniques et Technologies des véhicules spatiaux Vol.1 : Généralités et contraintes de développement*. Cépaduès Editions.
- [Coffey and Deprit, 1982] Coffey, S. and Deprit, A. (1982). Third-Order Solution to the Main Problem in Satellite Theory. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 5(4) :366–371.
- [Cook, 1988] Cook, A. (1988). *The Motion of the Moon*. IOP Publishing Ltd.
- [Danby, 1987] Danby, J. M. A. (1987). The Solution of Kepler's Equations - Part Three. *Celestial Mechanics*, 40 :303–+..
- [Danby, 1988] Danby, J. M. A. (1988). *Fundamentals of celestial mechanics*. Richmond, Va., U.S.A. : Willmann-Bell, 1988. 2nd ed., rev. & enl.
- [Danby and Burkardt, 1983] Danby, J. M. A. and Burkardt, T. M. (1983). The solution of Kepler's equation. I. *Celest. Mech.*, 31 :95–107.
- [D'Avanzo et al., 1997] D'Avanzo, P., Teofilatto, P., and Ulivieri, C. (1997). Long-term effects on lunar orbiter. *Acta Astronautica*, 40 :13–20.
- [De Sadeleer, 2004] De Sadeleer, B. (2004). Analytical theory of an artificial satellite of the moon. In Belbruno, E. and Gurfil, P., editors, *Astrodynamics, Space Missions, and Chaos - Volume 1017 of the Annals of the New York Academy of Sciences - Proceedings of the Conference "New Trends in Astrodynamics and Applications, January 20-22, 2003, Washington "*, pages 434–449.
- [De Sadeleer, 2005] De Sadeleer, B. (2005). Complete Zonal Problem of the Artificial Satellite : Generic Compact Analytic First Order in Closed Form. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 91 :239–268.
- [De Sadeleer and Henrard, 2005] De Sadeleer, B. and Henrard, J. (2005). Orbit of a lunar artificial satellite : Analytical theory of perturbations. In *IAU Colloq. 196 : Transits of Venus : New Views of the Solar System and Galaxy*, pages 254–262.
- [De Sadeleer and Henrard, 2006] De Sadeleer, B. and Henrard, J. (2006). The Combined Effect of J2 and C22 on the Critical Inclination of A Lunar Orbiter. *Advances in Space Research*, 37(1) :80–87. The Moon and Near-Earth Objects. Also available as <http://dx.doi.org/10.1016/j.asr.2005.06.052>.
- [De Sadeleer B., 2006] De Sadeleer B. (2006). Analytical theory of a lunar artificial satellite with third body perturbations. *Celest. Mech.*, in press.
- [Deprit, 1969] Deprit, A. (1969). Canonical Transformations Depending on a Small Parameter. *Celest. Mech.*, 1 :12–30.
- [Deprit and Rom, 1970] Deprit, A. and Rom, A. (1970). The Main Problem of Artificial Satellite Theory for Small and Moderate Eccentricities. *Celest. Mech.*, 2 :166–206.
- [Devlin, 2005] Devlin, K. (2005). *Les Enigmes mathématiques du 3e millénaire : les 7 grands problèmes non résolus à ce jour*. Le Pommier.
- [Ferrari, 1977] Ferrari, A. J. (1977). Lunar gravity - A harmonic analysis. *J. Geophys. Res.*, 82 :3065–3084.
- [Ferrari and Ananda, 1977] Ferrari, A. J. and Ananda, M. P. (1977). Lunar gravity - A long-term Keplerian rate method. *J. Geophys. Res.*, 82 :3085–3097.
- [Ferrari et al., 1980] Ferrari, A. J., Sinclair, W. S., Sjogren, W. L., Williams, J. G., and Yoder, C. F. (1980). Geophysical parameters of the earth-moon system. *J. Geophys. Res.*, 85 :3939–3951.
- [Floborghagen et al., 1996] Floborghagen, R., Noomen, R., Visser, P. N. A. M., and Racca, G. D. (1996). Global lunar gravity recovery from satellite-to-satellite tracking. *Planet. Space Sci.*, 44(10) :1081–1097.

- [Foing and ILE WG, 2004] Foing, B. H. and ILE WG (2004). Roadmap for Future Lunar Exploration. In *35th COSPAR Scientific Assembly*, pages 4061–+.
- [Foing et al., 2003] Foing, B. H., Racca, G. D., Marini, A., Heather, D. J., Koschny, D., Grande, M., Huovelin, J., Keller, H. U., Nathues, A., Josset, J. L., Malkki, A., Schmidt, W., Noci, G., Birkel, R., Iess, L., Sodnik, Z., and McManamon, P. (2003). SMART-1 mission to the moon : Technology and science goals. *Advances in Space Research*, 31 :2323–2333.
- [Garmier and Barriot, 2001] Garmier, R. and Barriot, J.-P. (2001). Ellipsoidal Harmonic expansions of the gravitational potential : theory and application. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 79(4) :235–275.
- [Gradshteyn and Ryzhik, 1980] Gradshteyn, I. and Ryzhik, I. (1980). *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press.
- [Heiskanen and Moritz, 1967] Heiskanen, W. A. and Moritz, H. (1967). *Physical geodesy*. San Francisco, W. H. Freeman [1967].
- [Henrard, 1973] Henrard, J. (1973). The Algorithm of the Inverse for Lie Transform. In *ASSL Vol. 39 : Recent Advances in Dynamical Astronomy*, pages 250–259.
- [Henrard, 1974] Henrard, J. (1974). Virtual singularities in the artificial satellite theory. *Celestial Mechanics*, 10 :437–449.
- [Henrard J., 1986] Henrard J. (1986). Algebraic manipulation on computers for lunar and planetary theories. In Kovalevsky, J. and Brumberg, V., editors, *Proceedings of the IAU Symposium 114, Reidel*, pages 59–62.
- [Hori, 1966] Hori, G. (1966). Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables. *Publ. Astron. Soc. Japan*, 18(4) :287–296.
- [Jefferys, 1971] Jefferys, W. (1971). Automated, Closed Form Integration of Formulas in Elliptic Motion. *Celest. Mech.*, 3 :390–394.
- [Jupp, 1988] Jupp, A. (1988). The Critical Inclination Problem : 30 Years of Progress. *Celest. Mech.*, 43 :127–138.
- [Kaula, 1966] Kaula, W. (1966). *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publishing Company.
- [Kelly, 1989] Kelly, T. (1989). A Note on First-Order Normalizations of Perturbed Keplerian Systems. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 46 :19–25.
- [Kholshevnikov, 1977] Kholshevnikov, K. (1977). On convergence of an asymmetrical body potential expansion in spherical harmonics. *Celest. Mech.*, 16 :45–60.
- [Knežević and Milani, 1998] Knežević, Z. and Milani, A. (1998). Orbit maintenance of a lunar polar orbiter. *Planet. Space Sci.*, 46 :1605–1611.
- [Konopliv et al., 2001] Konopliv, A., Asmar, S., Carranza, E., Sjogren, W., and Yuan, D. (2001). Recent Gravity Models as a Result of the Lunar Prospector Mission. *Icarus*, 150 :1–18.
- [Konopliv et al., 1998] Konopliv, A. S., Binder, A. B., Hood, L. L., Kucinskas, A. B., Sjogren, W. L., and Williams, J. G. (1998). Improved Gravity Field of the Moon from Lunar Prospector. *Science*, 281 :1476–1480.
- [Konopliv et al., 1993] Konopliv, A. S., Sjogren, W. L., Wimberly, R. N., Cook, R. A., and Vijayaraghavan, A. (1993). A high resolution lunar gravity field and predicted orbit behavior. *Advances in the Astronautical Sciences, Astrodynamics (AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Pap. # AAS 93-622, Victoria, B.C.)*, 85 :1275–1295.
- [Kozai, 1959] Kozai, Y. (1959). The motion of a close earth satellite. *AJ*, 64 :367–+.
- [Kozai, 1962a] Kozai, Y. (1962a). Mean values of cosine functions in elliptic motion. *Astron. J.*, 67 :311–312.

- [Kozai, 1962b] Kozai, Y. (1962b). Second-Order Solution of Artificial Satellite Theory without Air Drag. *Astron. J.*, 67 :446–461.
- [Lemoine et al., 1997] Lemoine, F. G. R., Smith, D. E., Zuber, M. T., Neumann, G. A., and Rowlands, D. D. (1997). A 70th Degree Lunar Gravity Model (GLGM-2) from Clementine and other tracking data. *J. Geophys. Res.*, 102 :16339–16359.
- [Liu and Laing, 1971] Liu, A. S. and Laing, P. A. (1971). Lunar Gravity Analysis from Long-Term Effects. *Science*, 173 :1017–1020.
- [Liu and Wang, 1998] Liu, L. and Wang, J.-S. (1998). An analytic solution of the orbital variation of lunar satellites. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 22 :328–351.
- [Liu and Wang, 2000] Liu, L. and Wang, X. (2000). On the orbital lifetime of high-altitude satellites. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 24 :284–288.
- [Lorell and Sjogren, 1968] Lorell, J. and Sjogren, W. L. (1968). Lunar Gravity : Preliminary Estimates from Lunar Orbiter. *Science*, 159 :625–627.
- [Maccone, 2002] Maccone, C. (2002). Planetary defense from the nearest 4 lagrangian points plus rfi-free radioastronomy from the farside of the moon : a unified vision. *Acta Astronautica*, 50 :185–199.
- [Marchal, 2000] Marchal, C. L. (2000). Fifth John V. Breakwell Memorial Lecture : The Restricted Three-Body Problem Revisited. *Acta Astronautica*, 47 :411–418.
- [Meirovitch, 1970] Meirovitch, L. (1970). *Methods of Analytical Dynamics*. McGraw-Hill.
- [Metris and Exertier, 1995] Metris, G. and Exertier, P. (1995). Semi-analytical theory of the mean orbital motion. *A&A*, 294 :278–286.
- [Metris et al., 1993] Metris, G., Exertier, P., Boudon, Y., and Barlier, F. (1993). Long period variations of the motion of a satellite due to non-resonant tesseral harmonics of a gravity. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 57 :175–188.
- [Meyer et al., 1994] Meyer, K. W., Buglia, J. J., and Desai, P. N. (1994). Lifetimes of lunar satellite orbits. *NASA STI/Recon Technical Report N - TP-3394*, 94 :27771–+.
- [Milani et al., 1996] Milani, A., Luise, M., and Scortecci, F. (1996). The lunar sub-satellite experiment of the ESA MORO mission : goals and performances. *Planet. Space Sci.*, 44 :1065–1076.
- [Miller et al., 2002] Miller, J. K., Konopliv, A. S., Antreasian, P. G., Bordi, J. J., Chesley, S., Helfrich, C. E., Owen, W. M., Wang, T. C., Williams, B. G., Yeomans, D. K., and Scheeres, D. J. (2002). Determination of Shape, Gravity, and Rotational State of Asteroid 433 Eros. *Icarus*, 155 :3–17.
- [Mizutani et al., 2003] Mizutani, H., Fujimura, A., Tanaka, S., Shiraishi, H., and Nakajima, T. (2003). LUNAR-A mission : Goals and status. *Advances in Space Research*, 31 :2315–2321.
- [Moons, 1982] Moons, M. (1982). Physical libration of the moon. *Celestial Mechanics*, 26 :131–142.
- [Moons, 1993] Moons, M. (1993). Averaging approaches. In *Proceedings of the “Artificial Satellite Theory Workshop”, U.S.N.O. Washington D.C.*, pages 201–+.
- [Moulton, 1970] Moulton, F. R. (1970). *An introduction to celestial mechanics*. New York : Dover, 1970, 2nd rev. edition.
- [Muller and Sjogren, 1968] Muller, P. and Sjogren, W. (1968). Mascons : Lunar Mass Concentrations. *Science*, 161 :680–684.
- [Murray and Dermott, 1999] Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*. Solar system dynamics by Murray, C. D., 1999.
- [Métris, 1991] Métris, G. (1991). Mean Values of Particular Functions in the Elliptic Motion. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 52 :79–84.

- [Namiki et al., 1999] Namiki, N., Hanada, H., Tsubokawa, T., Kawano, N., Ooe, M., Heki, K., Iwata, T., Ogawa, M., and Takano, T. (1999). Selenodetic experiments of SELENE : relay subsatellite, differential VLBI, and laser altimeter. *Advances in Space Research*, 23 :1817–1820.
- [Oesterwinter, 1970] Oesterwinter, C. (1970). The Motion of a Lunar Satellite. *Celest. Mech.*, 1 :368–436.
- [Osácar and Palacián, 1994] Osácar, C. and Palacián, J. (1994). Decomposition of Functions for Elliptic Orbits. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 60 :207–223.
- [Plummer, 1896] Plummer, H. C. (1896). a graphical method of solving kepler’s equation. *MNRAS*, 56 :317–+.
- [Pollard, 1966] Pollard, H. (1966). *Mathematical introduction to celestial mechanics*. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall [1966].
- [Press et al., 1986] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P. (1986). *Numerical Recipes in Fortran 77 - The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.
- [Roy, 1968] Roy, A. (1968). The Theory of the Motion of an Artificial Lunar Satellite I. Development of the Disturbing Function. *Icarus*, 9 :82–132.
- [Sagitov, 1985] Sagitov, M. U. (1985). Lunar Gravimetry. *FTD-ID(RS)T-064584*, U.S. Air Force.
- [Sasaki et al., 2003] Sasaki, S., Iijima, Y., Tanaka, K., Kato, M., Hashimoto, M., Mizutani, H., and Takizawa, Y. (2003). The SELENE mission : Goals and status. *Advances in Space Research*, 31 :2335–2340.
- [Seidelmann, 1992] Seidelmann, P. K. (1992). *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac, by P. Kenneth Seidelmann. Published by University Science Books, ISBN 0-935702-68-7, 752pp, 1992.
- [Shniad, 1970] Shniad, H. (1970). The Equivalence of von Zeipel Mappings and Lie Transforms. *Celest. Mech.*, 2 :114–120.
- [Sjogren et al., 1971] Sjogren, W. L., Muller, P. M., Gottlieb, P., Wong, L., Buechler, G., Downs, W., and Prislín, R. (1971). Lunar Surface Mass Distribution from Dynamical Point-Mass Solution. *Moon*, 2 :338–+.
- [Smith et al., 1997] Smith, D. E., Zuber, M. T., Neumann, G. A., and Lemoine, F. G. (1997). Topography of the Moon from the Clementine LIDAR. *J. Geophys. Res.*, 102 :1591–+.
- [Steichen, 1998] Steichen, D. (1998). An Averaging Method To Study the Motion of Lunar Artificial Satellites - II : Averaging and Applications. *Celest. Mech. & Dyn. Astr.*, 68 :225–247.
- [Stevens, 1998] Stevens, G. O. (1998). *Mouvements des Corps Célestes - Eléments de Mécanique Céleste, Satellites et Sondes spatiales - Eléments de Cosmologie - 556 p.* Stevens Guy Omer, Bruxelles, 1998.
- [Szebehely, 1989] Szebehely, V. (1989). *Adventures in Celestial Mechanics*. University of Texas Press.
- [Tapley and Schutz, 1975] Tapley, B. D. and Schutz, B. E. (1975). Estimation of unmodeled forces on a lunar satellite. *Celest. Mech.*, 12 :409–424.
- [Tisserand, 1889] Tisserand, F. (1889). *Traité de Mécanique Céleste, Tome I.* Paris, Gauthier-Villars.
- [Tisserand, 1896] Tisserand, F. (1896). *Traité de Mécanique Céleste, Tome IV.* Paris, Gauthier-Villars.
- [Touboul et al., 2002] Touboul, P., Foulon, B., Lafargue, L., and Metris, G. (2002). The MICROSCOPE mission. *Acta Astronautica*, 50 :433–443.



- [von Zeipel, 1916] von Zeipel, H. (1916). *Arkiv Matem. Astron. Fysik*, 11(1) :1.
- [Wiles, 1995] Wiles, A. (1995). Modular elliptic curves and fermat's last theorem. *Annals Math.*, 141 :443–551.
- [Williams et al., 2006] Williams, J. G., Boggs, D. H., and Ratchiff, J. T. (2006). Lunar Interior Results and Possibilities. In Mackwell, S. and Stansbery, E., editors, *37th Annual Lunar and Planetary Science Conference*, pages 1229–+.
- [Wollenhaupt, 1970] Wollenhaupt, W. R. (1970). Apollo Orbit Determination and. Navigation. *AIAA Paper 70-27, New York*.
- [Wong et al., 1971] Wong, L. G., Buechler, W., Sjogren, W. L., Muller, P. M., and Gottlieb, P. (1971). A Surface-Layer Representation of the Lunar Gravity Field. *J. Geophys. Res.*, 76 :6220–6236.
- [Zarrouati, 1987] Zarrouati, O. (1987). *Trajectoires spatiales*. Toulouse Cépaduès Editions CNES [1987].
- [Zuber et al., 1994] Zuber, M. T., Smith, D. E., Lemoine, F. G., and Neumann, G. A. (1994). The Shape and Internal Structure of the Moon from the Clementine Mission. *Science*, 266 :1839–+.